Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 9 (30 novembre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo; provare che, se a, b sono due elementi qualsiasi di G, allora ciascuna delle equazioni
$$aX = b, \qquad Ya = b$$
ha una ed una sola soluzione.

2. Trovare tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ che contengono 12.

3. Trovare l'ordine del sottogruppo del gruppo dato generato dall'elemento assegnato::
   (a) il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{24}$ generato da $[4]$;
   (b) il sottogruppo di $\mathcal{C}_5$ generato da $\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$
   (c) il sottogruppo di $\mathcal{C}_6$ generato da $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;
   (d) il sottogruppo di $\mathcal{C}_{16}$ generato da $\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$;
   (e) il sottogruppo di S_6 generato da $(435)(14)(53)$;
   (f) il sottogruppo di S_8 generato da $(27)(825)(73)$.

4. Nel gruppo delle biiezioni di $\mathbb{R}^2$ si considerino gli elementi f e g definiti nel seguente modo: per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f((x, y)) = (-x, -y) \qquad\qquad g((x, y)) = (2 - x, 2 - y).$$
Determinare l'ordine di f, g e $g \circ f$.

5. Stabilire quali dei seguenti insiemi dotati di due operazioni sono anelli:
   (a) $7\mathbb{Z}$ con le usuali addizione e moltiplicazione;
   (b) l'insieme $\mathbb{R}^\star$ dei numeri reali non nulli con l'operazione di moltiplicazione e con l'operazione $\circ$ definita da $a \circ b = 1$;

6. Calcolare $4a$ e a^4 per gli elementi a dei seguenti anelli:
   (a) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$;
   (b) $[2]_{16} \in \mathbb{Z}_{16}$;
   (c) $[2]_5 \in \mathbb{Z}_5$.

7. Si consideri l'anello commutativo

$$F = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\},$$

dove 0 è l'elemento neutro additivo, 1 è l'elemento neutro moltiplicativo, $x + x = 0$ per ogni $x \in F$ e $\alpha^2 = \alpha + 1$.

   (a) Scrivere la tabella additiva e quella moltiplicativa di F.

   (b) Verificare che F è un campo.

8. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle sue parti.

   Allora $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$, dove $+$ è la differenza simmetrica, $A + B = A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ con A, B sottoinsiemi di X, e $\cdot$ è la intersezione, è un anello commutativo unitario.

   (a) Dire quali sono l'elemento neutro additivo e l'elemento neutro moltiplicativo.

   (b) Verificare che $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ è booleano, cioé per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ si ha che $A^2 = A$.

   (c) Provare che $\mathcal{P}(X)$ è un dominio d'integrità se e solo se $|X| = 1$.

   (d) Dare la tabella additiva e la tabella moltiplicativa di $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ nel caso in cui $|X| = 2$ e nel caso in cui $|X| = 3$.