Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 8 (23 novembre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Calcolare le seguenti potenze:

$$6^{15} \pmod{13}; \qquad 7^{67} \pmod{45}; \qquad 128^{10} \pmod{33}.$$

2. Utilizzando il piccolo teorema di Fermat, provare che per ogni intero positivo n si ha che $42 | n^7 - n$.

3. Provare che se p è un numero primo, allora

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}.$$

4. Usare il teorema di Eulero-Fermat per determinare l'ultima cifra nell'espansione decimale di 7^{1000}.

5. Sia a un intero fissato $\neq 0$. Si consideri in $\mathbb{Z}$ l'operazione binaria $*$ definita da:

$$x * y = x + y - a$$

con x, y numeri interi.

   (a) Verificare che $*$ è associativa e commutativa.

   (b) Stabilire se $(\mathbb{Z}, *)$ è un gruppo.

6. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \diamond (c, d) = (a + c, b + c).$$

   (a) Stabilire se $\diamond$ è associativa.

   (b) Stabilire se $\diamond$ è commutativa.

   (c) Stabilire se esiste un elemento neutro rispetto a $\diamond$.

7. Sia $H = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad | \quad a \neq 0\}$. Stabilire se H è un gruppo rispetto alla seguente operazione: per $(a, b), (c, d) \in H$

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, b + ad).$$

8. Stabilire se l'operazione binaria $*$ determina una struttura di gruppo sull'insieme dato nei seguenti casi:

   (a) Sia $*$ definita su $\mathbb{R}$ da:

$$a * b = a + b - ab.$$

(b) Sia $X = \{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\} \subset \mathbb{Z}_{10}$ e sia $*$ la moltiplicazione mod 10.

9. Sia $\mathbb{Q}^+$ l'insieme dei numeri razionali positivi; in $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ si consideri la seguente operazione $\star$: se $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

$$(a,b) \star (c,d) = (\frac{ac}{7}, 3bd).$$

   (a) Provare che $(\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+, \star)$ un gruppo.

   (b) Determinare l'inverso di $(2,5)$.

10. Trovare l'ordine dei seguenti elementi:

   (a) $[3]_{20} \in \ Z_{20}$;

   (b) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \in \mathcal{C}_8$;

   (c) $[3]_{20} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20})$;

   (d) $-i \in \mathbb{C}$;

   (e) $-i \in \mathbb{C}^\star := \mathbb{C} - \{0\}$;

   (f) $(325) \circ (214) \in S_6$.

11. Esprimere le seguenti permutazioni come prodotto di cicli disgiunti e poi come prodotto di trasposizioni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Stabilire la parità di $(f \circ g)^{-1}$.

12. Esprimere i seguenti prodotti di permutazioni come prodotto di cicli disgiunti:

$$(8432) \circ (524), \quad (3761)^3, \quad (6512)^{-1}$$

13. Elencare tutti gli elementi di S_3 che sono permutazioni pari.

   Elencare tutti gli elementi di S_4 che sono permutazioni dispari.

14. Dare un esempio di un ciclo di lunghezza $d > 2$ il cui quadrato è un ciclo.

   Dare un esempio di un ciclo di lunghezza $d > 2$ il cui quadrato non è un ciclo.

   Stabilire quali sono i cicli per i quali è vero che il quadrato è ancora un ciclo.