Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 6 (29 ottobre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Si consideri la seguente applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da:

$$f(n) = \mathrm{MCD}(n, 77)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Trovare $f(236)$, $f(1980)$ e $f(2387)$.
   (b) Trovare $\mathrm{Im}(f)$ e verificare che f non è iniettiva.
   (c) Descrivere tutte le classi di equivalenza di $\mathbb{N}$ rispetto alla relazione nucleo di f.

2. Sapendo che ogni numero naturale positivo n può univocamente essere scritto nella forma $n = 2^{\alpha}(2s+1)$ con α ed s numeri naturali, si consideri in $\mathbb{N}^+$ la seguente relazione d'ordine $\leq$:

siano $n = 2^{\alpha}(2s+1)$ ed $m = 2^{\beta}(2t+1)$

$$n \leq m \iff \begin{cases} n = m \\ \alpha < \beta \quad \text{oppure } \alpha = \beta \text{ e } s < t \end{cases}$$

   (a) Inserire $\leq$ tra 5 e 14 , 6 e 9, 16 e 28, 10 e 35.
   (b) Stabilire se $\leq$ gode della proprietà totale.
   (c) Determinare gli eventuali elementi minimali e massimali.

3. Siano a e b numeri interi non entrambi nulli tali che $\mathrm{MCD}(a, b)$ è un numero primo p. Stabilire i possibili valori per

   (a) $\mathrm{MCD}(a^2, b^2)$
   (b) $\mathrm{MCD}(a, b^2)$

fornendo per ciascuno di essi un esempio.

4. In $\mathbb{C} - \{0\}$ si consideri la seguente relazione ρ:

$$\alpha\rho\beta \Leftrightarrow \alpha|\beta| = \beta|\alpha|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

   (a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{C} - \{0\}$.
   (b) Descrivere esplicitamente:

$$[1]_\rho,\ [i]_\rho,\ [-1]_\rho,\ [-i]_\rho,\ [1+i]_\rho.$$

(c) Descrivere geometricamente le classi di equivalenza di ρ.

(d) Determinare, a meno di isomorfismi, l'insieme quoziente.

5. Stabilire quali dei seguenti elementi di $\mathbb{Z}_m$ sono invertibili; per ciascuno degli elementi invertibili trovare l'inverso:

   (a) $[-45]_{12}$, $[29]_{12}$, $[52]_{12}$, $[-30]_{12}$, $[19]_{12}$;

   (b) $[-22]_{18}$, $[41]_{18}$, $[25]_{18}$, $[-47s]_{18}$, $[28]_{18}$.

6. Verificare che l'insieme $\left\{0, 1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9\right\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.

7. Stabilire se l'insieme $\left\{0, 1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2\right\}$ è un sistema completo di residui modulo 11.

8. Stabilire se l'insieme $\left\{3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\right\}$ è un sistema ridotto di residui modulo 7.

9. Utilizzando il principio di induzione matematica, provare che se m è un intero positivo, allora:

   (a) $4^m \equiv 1 + 3m \pmod 9$;

   (b) $5^m \equiv 1 + 4m \pmod{16}$.

10. Sia p un numero primo.
    Provare che un numero intero a è un inverso aritmetico di se stesso se e solo se $a \equiv 1 \pmod p$ oppure $a \equiv p - 1 \pmod p$.