**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010**
**AL110 - Algebra 1**
**Tutorato 4 (19 ottobre 2009)**
**E. Di Gloria - D. Menichetti**

1. Utilizzando l'algoritmo euclideo di divisione stabilire che:
   (a) ogni numero intero dispari è della forma $4k+1$ oppure $4k+3$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (b) il quadrato di ogni numero intero è della forma $3k$ oppure $3k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (c) il cubo di ogni numero intero è della forma $9k$ oppure $9k+1$ oppure $9k+8$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (d) il cubo di ogni numero intero è della forma $7k$ oppure $7k \pm 1$ con $k \in \mathbb{Z}$;
   (e) un intero che è sia un quadrato che un cubo è della forma $7k$ oppure $7k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. Siano $a, b$ interi non entrambi nulli. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) $a \mid b$;
   (b) $\mathrm{MCD}(a, b) = |a|$;
   (c) $\mathrm{mcm}(a, b) = |b|$ (da fare successivamente).

3. Provare che ogni numero intero della forma $6k+5$ con $k \in \mathbb{Z}$ è anche della forma $3h+2$ con $h \in \mathbb{Z}$, e che il viceversa non è vero.

4. Siano $a, b, c$ numeri interi non nulli. Provare che:
   (a) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$ e $\mathrm{MCD}(a, c) = 1$, allora $\mathrm{MCD}(a, bc) = 1$.
   (b) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha che $\mathrm{MCD}(a^n, b) = \mathrm{MCD}(a, b^n) = 1$.
   (c) $\mathrm{MCD}(ac, bc) = |c|\mathrm{MCD}(a, b)$.
   (d) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora $\mathrm{MCD}(ac, b) = \mathrm{MCD}(c, b)$.
   (e) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha che $\mathrm{MCD}(a^n, b^n) = 1$.

5. Provare che per ogni numero intero $n$
   (a) $2 \mid n(n+1)$;
   (b) $3 \mid n(n+1)(n+2)$;
   (c) $4 \nmid n^2 + 2$.

6. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

   (a) $7 \mid 2^{3n} - 1$;

   (b) $8 \mid 3^{2n} + 7$;

   (c) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$;

7. Verificare che per ogni numero intero $a$ si ha che $3|a(2a^2 + 7)$.

8. Provare che se $a$ è un numero intero dispari, allora $32|(a^2 + 3)(a^2 + 7)$.

9. Provare che:

   (a) Il quadrato di ogni numero intero dispari è della forma $8k + 1$.

   (b) Se $a$ è un qualsiasi intero dispari allora $24|a(a^2 - 1)$.

   (c) Se $a$ e $b$ sono interi dispari, allora $8|(a^2 - b^2)$.

   (d) Provare che se $a$ è un numero intero tale che $2 \nmid a$ e $3 \nmid a$, allora $24 \mid (a^2 - 1)$.

   (e) Se $a$ è un qualsiasi numero intero, allora $360|a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$:

10. Un intero positivo si dice *triangolare* se è somma di interi consecutivi a partire da 1.

    (a) Un numero è triangolare se e solo se è della forma $\frac{n(n+1)}{2}$ per qualche $n \geqslant 1$ (Pitagora circa 550 a.C.)

    (b) Un intero $m$ è un numero triangolare se e soltanto se $8m + 1$ è un quadrato perfetto (cioè esiste un intero $a$ tale che $8m + 1 = a^2$).
    ( Plutarco, circa 100 d.C.)

    (c) La somma di due numeri tiangolari successivi è un quadrato perfetto. (Nicomaco, circa 100 d.C.)

    (d) Se $m$ è un numero triangolare, lo sono anche $9m + 1$, $25m + 3$ e $49m + 6$. (Eulero, 1775)

    (e) Se $t_n$ denota l'$n$-esimo numero triangolare, allora

    $$t_n = \left( \begin{array}{c} n+1 \\ 2 \end{array} \right).$$

    (f) Provare che :

    $$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad n \geqslant 1$$

    (Aryabhata, circa 500 d.C.).

    (g) Determinare per quali $n$ si ha che $t_n$ divide $t_1 + t_2 + \cdots + t_n$.

    (h) Provare che se $m$ è la somma di due numeri triangolari, allora $4m+1$ è somma di due quadrati.