Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 3 (12 ottobre 2009)

E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:
   (a) per ogni $n \geq 2$ si ha che
   $$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3};$$
   (b) per ogni $n \geq 1$ si ha che
   $$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n;$$

2. Sia X un insieme con 3 elementi.
   (a) Stabilire quante relazioni (binarie) si possono considerare in X.
   (b) Stabilire quante di esse sono relazioni d'equivalenza.

3. Sia X un insieme con $n > 1$ elementi. Stabilire quante sono le relazioni d'equivalenza in X con 2 classi d'equivalenza.

4. Nell'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si consideri la seguente relazione:
   $$A\sigma B \iff A - B \text{ è un insieme finito.}$$
   Stabilire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva e totale sono soddisfatte da σ.

5. Stabilire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica e totale sono soddisfatte dalle seguenti relazioni su $\mathbb{Z}$:
   siano $x, y \in \mathbb{Z}$
   (a) $x\sigma_1 y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y + 1;$
   (b) $x\sigma_2 y \quad \Leftrightarrow \quad xy = 0;$
   (c) $x\sigma_3 y \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \leq 1.$

6. Nell'insieme $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si consideri la seguente relazione
   $$x\sigma y \quad \Leftrightarrow \quad x|y \text{ in } \mathbb{Z}, \ (\text{cioè esiste } c \in \mathbb{Z}, \text{ tale che } xc = y).$$
   (a) Stabilire di quali delle seguenti proprietà gode la relazione σ:
      i. riflessiva

ii. simmetrica
iii. antisimmetrica
iv. transitiva
v. totale.

(b) Nell'insieme X si consideri la seguente relazione ρ:

$$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x\sigma y \ \text{ e } \ y\sigma x.$$

Verificare che ρ è una relazione di equivalenza su X e determinare le classi di equivalenza modulo ρ.

(c) Si consideri la relazione σ' definita in X/ρ nel seguente modo:

$$[x]_\rho \sigma' [y]_\rho \quad \Leftrightarrow \quad x\sigma y$$

Verificare che σ' è una relazione d'ordine. Rappresentare $(X/\rho, \sigma')$ tramite un diagramma lineare.

7. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $f(a, b) = a + 2b + 1$.

   (a) Trovare Im f e verificare che f non è iniettiva.

   (b) Descrivere le classi d'equivalenza rispetto alla relazione nucleo di f dei seguenti elementi di $N \times \mathbb{N}$: $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(7, 2)$.

8. Siano

$$\mathbf{S^1} = \big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} = \mathbf{1}\big\}$$

(circonferenza del piano euclideo di raggio 1 e centro nell'origine)

e

$$\mathbf{S} = \big\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} + \mathbf{y} = \mathbf{0}\big\}$$

(circonferenza del piano euclideo di raggio $\frac{1}{2}$ e centro $(0, -\frac{1}{2})$.

   (a) Sia $\psi : \mathbf{S^1} \longrightarrow \mathbf{S}$ l'applicazione definita da $\psi(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2})$; verificare che ψ è biiettiva; determinare ψ^{-1}.

   (b) Sia $\varphi : \mathbf{S^1} \longrightarrow \mathbf{S}$ l'applicazione definita da $\varphi(x, y) = (-xy, -y^2)$. Verificare che φ è suriettiva.

   (c) Verificare che $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ se e solo se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ o $x_2 = -x_1$ e $y_2 = -y_1$. Qual è il significato geometrico di questo fatto?

   (d) Cosa si può dire dell'insieme quoziente di $\mathbf{S^1}$ modulo la relazione nucleo di φ?