Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 2 (5 ottobre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Sia X un insieme non vuoto; se A e B sono sottoinsiemi di X, provare che per ogni $x \in X$ si ha che:
   (a) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
   (b) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;
   (c) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

2. Si considerino le seguenti applicazioni:
   $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^5 - 1$,
   $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \frac{1}{x^4+2}$,
   $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \cos x$.
   (a) Dire quali applicazioni sono iniettive, suriettive, biiettive.
   (b) Determinare l'immagine di ogni applicazione.

3. Siano $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ applicazioni definite rispettivamente da $f(x) = 2x^3 - 1$ e $g(x) = 5x - 4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Descrivere $(g \circ f)^{-1}$ e verificare che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4. Se $x \in \mathbb{R}$, sia $[x]$ il più grande intero minore o uguale ad x, detto anche **parte intera di** x. Siano le applicazioni $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite nel modo seguente:
$$g(z) := 2z, \qquad f(z) := [z/2].$$
   (a) Descrivere l'applicazione $g \circ f$ e dire se essa è uguale a $f \circ g$.
   (b) Cosa si può dire sulle proprietà di iniettività e di suriettività di f e di g?

5. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:
   (a) per ogni $n \geq 1$ si ha che $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;
   (b) per ogni $n \geq 1$ si ha che $1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$;
   (c) per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1};$$
   (d) per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$\sum_{k=0}^{n}(3k + 1) = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2};$$

(e) per ogni $n \geq 4$ si ha che $n! > n^2$;

(f) per ogni $n \geq 6$ si ha che $n! > n^3$;

(g) per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$(-1)1 + (-1)^2 2^2 + \cdots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

6. Sia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $\varphi(n) = n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Provare che non esiste alcuna applicazione che sia inversa destra di φ .

   (b) Trovare due inverse sinistre di φ.

7. Sia $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $\psi(0) = 0$ e $\psi(n) = n - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

   (a) Provare che non esiste alcuna applicazione che sia inversa sinistra di ψ .

   (b) Trovare due inverse destre di ψ.