Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 10 (7 dicembre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Determinare la caratteristica di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}_{31}$ e $\mathbb{Z}_{10}[X]$.

2. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottoanelli:

   (a) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{C}$;

   (b) $\{q \in \mathbb{Q} \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ dispari}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{Q}$.

3. Si considerino i seguenti anelli:

   (a) $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$;

   (b) $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$;

   (c) $(\mathbb{Z}_8[X], +, \cdot)$;

   (d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con l'addizione e la moltiplicazione definite da:
   $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (a, b)(c, d) = (ac, bd);$$

   (e) $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$;

   (f) $A = \big(\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\big)$;

   (g) il sottoanello di $\mathbb{R}^{[0,1]}$ formato dalle funzioni continue.

   (a) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.

   (b) Per ciascuno dei domini d'integritá D del punto precedente, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili $U(D)$.

4. Determinare la somma e il prodotto dei seguenti polinomi:

   (a) $f(X) = [2]X^5 - [4]X^3 + [2]X + [7]$, $g(X) = [4]X^3 + [3]X^2 + [3]$ in $\mathbb{Z}_8[X]$;

   (b) $f(X) = [3]X^4 + [2]X^3 + [5]X + [6]$, $g(X) = [4]X^3 + [9]X^2 + [11]$ in $\mathbb{Z}_{12}[X]$.

5. Dire quanti sono i polinomi in $\mathbb{Z}_5[X]$ della forma $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, cioé quanti elementi ha il sottoinsieme di $\mathbb{Z}_5[X]$ formato dal polinomio nullo e dai polinomi di grado $\leqslant 3$.

6. Sia $h(X) = [3]X^4 + [2]X^3 + [4]X + [2] \in \mathbb{Z}_5[X]$. Elencare i polinomi di $\mathbb{Z}_5[X]$ associati ad $h(X)$.

7. Si determini il polinomio monico associato ad:
   (a) $g(X) = -\frac{6}{11}X^8 - 34X + \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}[X]$;
   (b) $g(X) = [3]X^7 - [4]X^5 + [2]X \in \mathbb{Z}_5[X]$;
   (c) $g(X) = [10]X^8 - [4]X^6 + [1] \in \mathbb{Z}_{11}[X]$.
8. Calcolare il quoziente ed il resto della divisione euclidea delle seguenti coppie di polinomi:
   (a) $f(X) = 2X^4 + 5X^2 + \frac{3}{5}, \quad g(X) = 3X^2 - X + \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}[X]$;
   (b) $f(X) = 2X^3 + 5X^2 + 7X - 8, \quad g(X) = -X^2 - 7X + 4 \in \mathbb{Z}[X]$;
   (c) $f(X) = X^3 + X^2 + X, \quad g(X) = -X^2 - X + [1] \in \mathbb{Z}_2[X]$;
   (d) $f(X) = [2]X^3+[5]X^2+[4]X-[6], \quad g(X) = [6]X^2-[2]X+[4] \in \mathbb{Z}_7[X]$.
9. Costruire un polinomio $f(X)$ di $\mathbb{Z}_2[X]$ tale che $f(0) = a$, $f(1) = b$, per ogni coppia (a, b) di elementi di $\mathbb{Z}_2$. Dedurre che ogni applicazione da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è polinomiale.
10. Costruire un polinomio $f(X)$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$ tale che $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.
11. Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare il MCD ed una identitá di Bézout per le seguenti coppie di polinomi di $\mathbb{Q}[X]$:
    (a) $f(X) = X^4 + 2X^3 - 5X^2 - 4X + 6, \quad g(X) = 2X^2 + 5X + 4$;
    (b) $f(X) = X^5 + 3X^3 - X^2 + 3, \quad g(X) = X^3 - 3X^2 + X - 1$.
12. Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare il MCD ed una identitá di Bézout per i seguenti polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$:
    $$f(X) = X^4 + [2]X^3 - [5]X^2 - [4]X + [6], \quad g(X) = [2]X^2 + [5]X + [4]$$
13. Si consideri il seguente polinomio di $\mathbb{Q}[X]$:
    $$f_n(X) = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$$
    (a) Calcolare $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$.
    (b) Utilizzando il punto (a), fare una ipotesi su $f_n(X)$, con $n \geq 1$, e provarla.