**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010**
**AL110 - Algebra 1**
**Seconda prova di valutazione intermedia**
**11 gennaio 2010**

*Cognome*____________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*____________________

**Avvertenza:** Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Determinare tutte le eventuali soluzioni distinte della seguente congruenza lineare:

$$234X \equiv 114 \pmod{102}$$

   (b) Determinare tutte le eventuali soluzioni distinte del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 3X \equiv 2 & \pmod{5} \\ 81X \equiv 6 & \pmod{7} \\ 11X \equiv 15 & \pmod{8} \\ 6X \equiv 3 & \pmod{9} \end{cases}$$

2. Nell'insieme $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - \{0\}$ si consideri la seguente operazione:

$$a \diamond b = |a|b.$$

   (a) Stabilire se $\diamond$ è associativa.

   (b) Stabilire se $\diamond$ è commutativa.

   (c) Stabilire se esiste un elemento neutro rispetto a $\diamond$.

   (d) Provare che:

      i. esiste un elemento neutro sinistro per $\diamond$, cioè esiste $e_s \in \mathbb{R}^\star$ tale che $e_s \diamond x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^\star$;

      ii. ogni elemento $a \in \mathbb{R}^\star$ possiede un inverso destro rispetto a $e_s$, cioè per ogni $a \in \mathbb{R}^\star$ esiste $\hat{a} \in \mathbb{R}^\star$ tale che $a \diamond \hat{a} = e_s$.

3. Sia $\sigma := (234) \circ (456) \circ (561) \circ (2376) \in S_7$.

   (a) Scrivere $\sigma$ come prodotto di cicli disgiunti, determinarne l'ordine e la parità. Calcolare $\sigma^4$.

   (b) Sia $\tau := (3567) \in S_7$. Calcolare $(\tau \circ \sigma)^{-1}$.

4. Si considerino i seguenti anelli:

   (a) $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$;

   (b) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$;

   (c) $(\mathbb{Z}_5[X], +, \cdot)$;

   (d) $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$;

   (e) $\big(\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} = \{f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\big)$, con $+, \cdot$ definiti nel seguente modo:

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

   $\forall x \in \mathbb{Q}, \ \ \forall f, g \in Q^{\mathbb{Q}}$.

   i) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.

   ii) Per ciascuno degli anelli dati, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili.

5. (a) Decomporre il polinomio $12X^5 - 18X^4 + 12X - 18 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

   (b) Decomporre il polinomio $X^5 - X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 2X - 2 \in \mathbb{Z}_7[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[X]$ .

   (c) Dimostrare che il polinomio $f(X) = X^4+4X^3+6X^2+4X+3 \in \mathbb{Z}[X]$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$, determinando un numero intero $\alpha$ in modo tale che per $f(X - \alpha)$ si possa applicare il criterio di Eisenstein.