Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Appello X
13 settembre 2010

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

(b) Siano x, y numeri reali qualunque.
Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} (x + ky) = \frac{1}{2}(n+1)(2x + ny)$$

2. Nell'insieme $X := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si consideri la seguente relazione binaria ρ:

$$(a,b)\rho(c,d) :\Longleftrightarrow ad - bc = 0$$

(a) Verificare che ρ è una relazione d'equivalenza in X.

(b) Descrivere le classi d'equivalenza $[(1,0)]_\rho$ e $[(1,1)]_\rho$.

(c) Descrivere la classe d'equivalenza $[(a,b)]_\rho$ per ogni $(a,b) \in X$.

(d) **FAC.** Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{ab}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \end{array}$$

i. Provare che

$$\mathtt{Im}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y = 0\}$$

ii. Provare che la relazione nucleo ρ_f coincide con la relazione ρ.

3. Nell'insieme dei numeri naturali positivi $\mathbb{N}_+$ si consideri la seguente relazione binaria σ:

$$x\sigma y :\Longleftrightarrow \text{esiste } \ n \in \mathbb{N}_+ \text{ tale che } \ y = x^n$$

   (a) Verificare che σ è una relazione d'ordine in N_+.

   (b) Stabilire se la relazione d'ordine σ gode della proprietà totale.

   (c) Verificare che l'insieme ordinato $(\mathbb{N}_+, \sigma)$ è privo di minimo e di massimo

   (d) Determinare gli eventuali elementi massimali e minimali.

4. Trovare tutti i generatori dei seguenti gruppi ciclici:

   (a) il gruppo moltiplicativo delle radici 9 dell'unità, $\mathcal{C}_9$;

   (b) il gruppo additivo $\mathbb{Z}_{13}$;

   (c) il gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{13})$;

   (d) il sottogruppo di S_8 generato da

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si consideri l'insieme

$$\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5} := \{f : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_5 \mid f \text{ applicazione}\}$$

   (a) Stabilire quanti sono gli elementi di $\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5}$;

   (b) stabilire quante sono le applicazioni iniettive, quante suriettive e quante biiettive da $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_5$.

   In $\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5}$ si considerino le operazioni $+, \cdot$ definite nel seguente modo:

$$(f+g)(x) = f(x) \oplus g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \odot g(x)$$

   per ogni $f, g \in Z_5^{\mathbb{Z}_5}$, per ogni $x \in \mathbb{Z}_5$ e con $\oplus$ e $\odot$ le usuali addizione e moltiplicazione in $\mathbb{Z}_5$.

   Sapendo che $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$ è un anello commutativo unitario,

   (a) determinare la caratteristica di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$;

   (b) caratterizzare gli elementi invertibili di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$;

   (c) dire quanti sono gli elementi invertibili di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$;

   (d) provare che un qualunque elemento di $\left(\mathbb{Z}_5^{\mathbb{Z}_5},\ +,\ \cdot\right)$ non nullo e non invertibile è uno zero-divisore.

6. Decomporre in fattori irriducibili i seguenti polinomi:

   (a) $f(X) = X^4 + 3$ rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$.

   (b) $g(X) = X^3 - 2X^2 - 2X + 2$ in $\mathbb{Z}_5[X]$;

   (c) $h(X) = X^4 + X^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_2[X]$.