Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Appello B
9 Febbraio 2010

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

   (b) Si considerino i numeri C_n con $n \geqslant 1$ definiti induttivamente nel seguente modo:

$$C_1 = 1 \quad \text{e, per } n \geqslant 2, \quad C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$$

   Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da:

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } |x| < 7 \\ \cos x & \text{se } |x| \geqslant 7 \end{cases}$$

(a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.

(b) Descrivere $\mathtt{Im}(f)$.

(c) Sia ρ_f la relazione nucleo di f. Descrivere $[1]_{\rho_f}$ e $[7]_{\rho_f}$.

3. Dato un insieme X, si denoti con $\mathcal{P}^*(X)$ l'insieme delle sue parti privato dell'insieme vuoto.

   Si consideri su $\mathcal{P}^*(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ la seguente relazione:

$$(A, B) \leq (C, D) :\Longleftrightarrow (A \subsetneq C) \text{ oppure } (A = C \text{ e } B \subseteq D).$$

   (a) Dimostrare che $\leq$ è una relazione d'ordine.

   (b) Stabilire se la relazione d'ordine $\leq$ è totale.

   (c) Calcolare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo.

   (d) Si consideri la seguente applicazione:

$$\begin{array}{rcl} i : \mathcal{P}^*(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}^*(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ (A, B) & \longmapsto & \{(a, b) : a \in A, b \in B\} . \end{array}$$

      i. Dimostrare che i è iniettiva.

      ii. Dimostrare o confutare il seguente asserto:

$$(A, B) \leq (C, D) \Longleftrightarrow i((A, B)) \subseteq i((C, D)), \forall A, B, C, D \in \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$$

4. (a) Sia: $\sigma := (156) \circ (68) \circ (543) \circ (1374) \in S_8$.
    i. Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti e determinarne l'ordine e la parità.
    ii. Calcolare σ^2 e σ^4.
    iii. Sia $\tau := (73) \circ (36) \in S_8$. Calcolare $\sigma \circ \tau$, $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

   (b) Sia $n \in \mathbb{N}_+$. Provare che se a è un numero naturale positivo tale che $\sqrt[n]{a}$ è un numero razionale, allora $\sqrt[n]{a}$ è un numero intero.

   (c) **(FAC.)** Provare che se n è un numero naturale positivo $\geqslant 2$, allora $\sqrt[n]{n}$ è un numero irrazionale.

5. (a) Verificare che il gruppo moltiplicativo $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$ non è ciclico.
   (b) Verificare che il gruppo moltiplicativo $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$ è ciclico.
   (c) Si consideri l'anello commutativo unitario

$$\left(\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\right)$$

con $+, \cdot$ definiti nel seguente modo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

per ogni $x \in [0,1]$ e per ogni $f, g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$.
Stabilire se questo anello è un dominio d'integrità e/o un campo.
Scrivere esplicitamente un elemento di $\mathbb{R}^{[0,1]}$ invertibile (e diverso dall'elemento neutro moltiplicativo).

6. (a) Trovare il MCD e dare una identità di Bézout per i seguenti due polinomi di $\mathbb{Q}[X]$:

$$X^4 - X^3 + 4X^2 - X + 3 \ \text{ e } \ X^3 - 2X^2 + X - 2$$

(b) Decomporre il polinomio $f(X) = X^4 - X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ in fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$.

(c) Decomporre i polinomi

$$g(X) = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}_5[X] \ \text{ e } \ h(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$$

in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_5[X]$.