

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 7 (7 maggio 2009)
Giacomo Milizia

1. Trovare il valore dei seguenti simboli di Legendre:

$$\left(\frac{73}{79}\right), \left(\frac{-217}{379}\right), \left(\frac{463}{577}\right),$$
$$\left(\frac{4376}{601}\right), \left(\frac{-8177}{97}\right), \left(\frac{90}{191}\right).$$

2. Stabilire quali delle seguenti congruenze quadratiche sono risolubili:

(a) $X^2 \equiv 156 \pmod{317}$;
(b) $3X^2 + 6X + 5 \equiv 0 \pmod{97}$;
(c) $2X^2 + 5X - 9 \equiv 0 \pmod{229}$.

3. Provare che:

(a) se p e $q = 2p + 1$ sono entrambi numeri primi dispari, allora -4 è una radice primitiva di q ;
(b) se $p \equiv 1 \pmod{4}$ è un numero primo, allora -4 e $\frac{p-1}{4}$ sono entrambi residui quadratici di p ;
(c) se $p \equiv 7 \pmod{8}$ è un numero primo, allora p divide $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$.

4. Stabilire se le seguenti congruenze quadratiche sono risolubili e, nei casi di risolubilità, trovare le soluzioni:

(a) $X^2 \equiv 42 \pmod{11^3}$;
(b) $X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{7^2}$;
(c) $X^2 + 6X + 2 \equiv 0 \pmod{3^3}$.

5. Trovare il numero delle soluzioni delle seguenti congruenze quadratiche:

(a) $X^2 \equiv 57 \pmod{2^6 \cdot 7^5 \cdot 29^6}$;
(b) $X^2 \equiv 9 \pmod{2^2 \cdot 5}$.

6. Trovare, se esistono, le soluzioni delle seguenti congruenze quadratiche:

(a) $X^2 \equiv 49 \pmod{144}$;
(b) $X^2 \equiv 25 \pmod{168}$.

7. Calcolare i seguenti simboli di Jacobi:

$$\left(\frac{776}{105}\right), \left(\frac{-424}{335}\right), \left(\frac{90}{949}\right).$$

8. Siano $n > 1$ ed $m > 1$ interi dispari tali che $n \equiv 1 \pmod{8}$ e $m \equiv 2 \pmod{n}$; calcolare il simbolo di Jacobi

$$\left(\frac{5m+n}{m}\right).$$

9. Determinare per quali valori del parametro λ , $0 \leq \lambda \leq 6$, la seguente congruenza quadratica

$$4X^2 + (\lambda - 2)X + 3\lambda \equiv 0 \pmod{7}$$

è risolubile.

10. (a) Determinare per quali valori del parametro λ , $0 \leq \lambda \leq 10$, la seguente congruenza quadratica

$$3X^2 + X + \lambda \equiv 0 \pmod{11}$$

è risolubile.

(b) Per ogni valore di λ per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

11. (a) Determinare per quali valori del parametro λ , $0 \leq \lambda \leq 29$, la seguente congruenza quadratica

$$X^2 + 3X + \lambda \equiv 0 \pmod{30}$$

è risolubile.

(b) Per ogni valore di λ per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.