Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Studi in Matematica, A.A. 2008/2009

TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri

3 aprile 2009

1. Si risolvano, se possibile, le seguenti equazioni congruenzali:

   a) $x^3 \equiv 5 \pmod{18}$;

   b) $x^2 \equiv 7 \pmod{18}$.

2. Si dimostri che le seguenti funzioni sono moltiplicative. Sono totalmente moltiplicative?

   a) $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$;

   b) $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$;

   c) $\sigma^k(n) := \sum_{d|n} d^k$.

3. Sia $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione moltiplicativa. Si dimostri che la funzione $\sigma_f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, definita da:

   $$\sigma_f(n) := \sum_{d|n} f(d)$$

   è una funzione moltiplicativa.

   Se f è una funzione totalmente moltiplicativa, σ_f è ancora totalmente moltiplicativa?

4. Si utilizzi l'Es. 2. per definire nuove funzioni moltiplicative.

5. Sia $n = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_r^{h_r}$, dove i p_i sono primi distinti e $h_i \geq 1$ per ogni i. Si dimostrino le seguenti uguaglianze:

   a) $\tau(n) = (h_1 + 1)(h_2 + 1) \ldots (h_r + 1)$;

   b) $\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{h_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{h_2+1}-1}{p_2-1}\right) \ldots \left(\frac{p_r^{h_r+1}-1}{p_r-1}\right)$;

   c) $\sigma^k(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{p_i^{k(h_i+1)}-1}{p_i^k-1}\right)$;

   d) $\phi(n) = (p_1^{h_1} - p_1^{h_1-1})(p_2^{h_2} - p_2^{h_2-1}) \ldots (p_r^{h_r} - p_r^{h_r-1})$.

6. Si dimostri che

   a) $\tau(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato perfetto;

   b) $\sigma(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato perfetto o il doppio di un quadrato perfetto;

   c) per $n > 2$, $\phi(n)$ è pari.

7. Si verifichino le seguenti uguaglianze:

   a) $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}(n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

   b) $\sigma = e * \mathbf{1}$, dove $e(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$;

   c) $\sigma_f = f * \mathbf{1}$.