

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 9 (23 maggio 2008)
Micaela De Santis

1. La successione dei numeri di Fibonacci è definita da:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{per } n > 1.$$

- (a) Provare che per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^n f_j = f_{n+2} - 1.$$

- (b) Provare che per $n \geq 3$ si ha:

$$f_n > \alpha^{n-2}$$

$$\text{con } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- (c) Scrivere il rapporto $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ di due numeri di Fibonacci consecutivi con $n \geq 2$ come frazione continuata.

2. Rappresentare i seguenti numeri razionali con frazioni continue finite semplici:

$$\frac{123}{13}, \quad -\frac{151}{307}, \quad \frac{383}{83}.$$

3. Determinare i numeri razionali rappresentati dalle seguenti frazioni continue finite semplici:

$$[-3; 1, 7, 3, 1], \quad [0; 2, 6, 1, 5, 4, 2].$$

4. Sia $r = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, con $r > 1$; provare che:

$$\frac{1}{r} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

5. Calcolare i convergenti delle seguenti frazioni continue semplici:

- (a) $[2; 3, 1, 4, 2, 3]$;
(b) $[-3; 1, 2, 1, 2, 1, 2]$;
(c) $[0; 3, 7, 2, 8]$.

6. Risolvere le seguenti equazioni diofantee attraverso le frazioni continue semplici:

- (a) $364X + 227Y = 1$;
(b) $158X - 57Y = 1$.