Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 7 (16 maggio 2007)
Micaela De Santis

1. Scrivere ciascuno dei seguenti numeri interi come somma di due quadrati o dimostrare che ciò non è possibile:

$$60, \;\; 221, \;\; 130, \;\; 260, \;\; 847, \;\; 980, \;\; 1073.$$

2. Scrivere ciascuno dei seguenti numeri interi come somma di quattro quadrati:

$$247, \;\; 308, \;\; 465.$$

3. Un intero positivo si dice *triangolare* se è somma di interi consecutivi a partire da 1.

   (a) Un numero è triangolare se e solo se è della forma $\frac{n(n+1)}{2}$ per qualche $n \geqslant 1$ (Pitagora circa 550 a.C.)

   (b) Un intero n è un numero triangolare se e soltanto se $8n + 1$ è un quadrato perfetto. (Plutarco, circa 100 d.C.)

   (c) La somma di due numeri tiangolari successivi è un quadrato perfetto.(Nicomaco, circa 100 d.C.)

   (d) Se m è un numero triangolare, lo sono anche $9m + 1$, $25m + 3$ e $49m + 6$. (Eulero, 1775)

   (e) Se t_n denota l'n-esimo numero triangolare, allora

   $$t_n = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (f) Provare che :

   $$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad n \geqslant 1$$

   (Aryabhata, circa 500 d.C.). (Sugg. : $t_{k-1} + t_k = k^2$.)

4. Se n è la somma di due numeri tringolari, allora $4n + 1$ è somma di due quadrati.

5. (a) Sia p un numero primo dispari. Provare che se p divide $a^2 + b^2$ con a, b numeri interi coprimi, allora $p \equiv 1 \pmod 4$.
   (Sugg. : si parta da $a^2 \equiv -b^2 \pmod p$ e si cerchi di applicare il piccolo teorema di Fermat.)

   (b) Utilizzando la parte (a), provare che ogni divisore positivo di una somma di due quadrati di interi coprimi è esso stesso la somma di due quadrati.