Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 2 (7 marzo 2007)
Micaela De Santis

1. Provare che se p è un numero primo e $0 < n < p$, allora p divide $\binom{p}{n}$.

2. Provare che per ogni primo dispari p e per ogni $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant j \leqslant p-1$ si ha:
$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{\text{p}}.$$

3. Provare che per ogni numero primo p con $n < p \leqslant 2n$ si ha:
$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{e} \quad \binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

4. Trovare una soluzione di ciascuna delle seguenti congruenze:
   (a) $X^2 \equiv -1 \pmod{13}$;
   (b) $X^2 \equiv -1 \pmod{17}$.

5. Determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione:
$$3X + 5Y - 4Z = 120$$

6. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:
   (a) $X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{243}$;
   (b) $X^2 - 3X + 2 \equiv 0 \pmod{243}$;
   (c) $X^3 + 1 \equiv 0 \pmod{28}$.

7. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:
   (a) $X^2 + 5X + 4 \equiv 0 \pmod{49}$;
   (b) $X^3 + 4X^2 + 19X + 1 \equiv 0 \pmod{125}$;
   (c) $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{(8)}$;
   (d) $X^{18} + 4X^{14} + 3X + 10 \equiv 0 \pmod{21}$.

8. Determinare il numero di soluzioni della congruenza polinomiale:
$$X^7 + X + 1 \equiv 0 \pmod{343}$$