

Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Studi in Matematica, A.A. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
28 febbraio 2008

1. Determinare le soluzioni (se esistono) delle seguenti equazioni diofantee:

- $x + 4y + 2z = 2$;
- $3x + 4y + 6z = 2$;
- $2x + 3y + 2z = 4$

2. Consideriamo i seguenti piani cartesiani:

$$x + y + 2z = 1, \quad x + 2y + 3z = 4.$$

Dimostrare che tali piani ammettono punti interi e che la loro intersezione possiede ancora punti interi, stabilendo se l'insieme è finito.

3. Consideriamo l'equazione:

$$ax + by + cz + w = 1$$

Dimostrare che tale equazione ammette sempre soluzione intere e costruire l'insieme delle soluzioni.

4. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi di equazioni diofantee

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z \equiv -1 & (\text{mod } 7) \\ 2x - 3z \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z \equiv -1 & (\text{mod } 7) \\ 2x - 3z \equiv 6 & (\text{mod } 14) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z \equiv -1 & (\text{mod } 5) \\ 2x - 3z \equiv 6 & (\text{mod } 7) \end{cases} \quad (3)$$