

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008
TN1 - Introduzione alla teoria dei numeri
Seconda prova di valutazione intermedia
29 maggio 2008

*Cognome*_____ *Nome*_____

*Numero di matricola*_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. (a) Calcolare il simbolo di Jacobi $\left(\frac{631}{60115}\right)$, sapendo che 631 e 1093 sono numeri primi.
- (b) Stabilire se la congruenza quadratica $X^2 \equiv 631 \pmod{60115}$ è risolvibile.

2. (a) Stabilire quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati:
- i. 51425;
 - ii. 55518021; (divisibile per 13 e 23)
 - iii. 4334084053; (divisibile per 13, 19, 31.
- (b) Scrivere i numeri del punto precedente, quando possibile, come somma di due quadrati.

3. Utilizzando le frazioni continue finite semplici, risolvere la seguente equazione diofantea:

$$302X - 113Y = 34.$$

4. Dimostrare che ogni intero positivo $k \geq 3$ è componente di almeno una terna pitagorica positiva.

5. Un intero $n > 1$ si dice *privo di fattori quadratici* se non è divisibile per alcun quadrato di un intero $m \neq \pm 1$. Se n è privo di fattori quadratici, allora la sua fattorizzazione è del tipo $\prod_{i=1}^r p_i$ con p_i primi distinti. Sia $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ la funzione aritmetica definita da

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n > 1 \text{ è privo di fattori quadratici} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che f è moltiplicativa ma non completamente.
- (b) Costruire l'inversa di Dirichlet di f .
- (c) Calcolare $\mu f * \mathbf{1}$.