Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato 5 (7 dicembre 2006)

Stefano Urbinati

1. Determinare tutti gli ideali primi dell'anello $\mathbb{Z}_{18}$ e per ciascuno di essi determinare, a meno di isomorfismi, l'anello quoziente.

2. Nell'anello prodotto $A = \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Q}$:
   (a) determinare gli zero-divisori;
   (b) determinare gli elementi invertibili;
   (c) determinare gli ideali primi e tra questi gli ideali massimali.

3. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{30}$ e stabilire quali tra essi sono massimali.

   Si considerino gli anelli quoziente $\frac{\mathbb{Z}_{30}}{[3]_{30}\mathbb{Z}_{30}}$ e $\frac{\mathbb{Z}_{30}}{[6]_{30}\mathbb{Z}_{30}}$. Dire quanti elementi hanno. Sono domini di integrità? Sono campi?

4. Si consideri il dominio d'integrità $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
   (a) Elencare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
   (b) Verificare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ non esistono elementi di norma 2 e non esistono elementi di norma 8.
   (c) Verificare che 2 , $1+\sqrt{-3}$ e $1-\sqrt{-3}$ sono elementi irriducibili e non primi in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
   (d) Dimostrare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ gli unici divisori comuni di 4 e $2+2\sqrt{-3}$ sono, a meno di elementi associati, 1 , 2 , $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$. Dedurne che non esiste MCD di 4 e $2+2\sqrt{-3}$.
   (e) Si considerino in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ gli elementi $\alpha = 1+\sqrt{-3}$ e $\beta = 1-\sqrt{-3}$.
      i. Provare che $MCD(\alpha, \beta) = 1$.
      ii. Provare che per il $MCD(\alpha, \beta)$ non sussiste una identità di Bézout.
      iii. Provare che $\alpha\beta = 2^2$ ma né α né β è un quadrato.
   (f) Provare che $MCD(2, 1+\sqrt{-3}) = 1$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
   (g) Provare che 2 e $1+\sqrt{-3}$ non hanno un minimo comune multiplo in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

5. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, trovare un massimo comun divisore di $29+20i$ e $2+19i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

6. In $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale $I = (2i, 6+4i)$.
   (a) Stabilire se I è principale ed in tal caso determinare un suo generatore.
   (b) Stabilire se l'ideale I è primo e se è massimale.
7. Si consideri l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.
   (a) Sia $I \neq (0)$ un ideale di $\mathbb{Z}[i]$. Provare che $\mathbb{Z}[i]/I$ è finito.
   (Sugg. Ricordare che l'ideale I è principale).
   (b) Stabilire se 2 e 3 sono elementi primi di $\mathbb{Z}[i]$.
   (c) Determinare la caratteristica ed la cardinalità di $\frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]}$ e di $\frac{\mathbb{Z}[i]}{3\mathbb{Z}[i]}$.
   (d) Cosa si può dire sugli anelli $\frac{\mathbb{Z}[i]}{2\mathbb{Z}[i]}$ e $\frac{\mathbb{Z}[i]}{3\mathbb{Z}[i]}$?
8. Provare che un intero di Gauss $a + ib$, con $a \neq 0$ e $b \neq 0$, è irriducibile se e solo se $a^2 + b^2$ è un numero primo di $\mathbb{Z}$.
9. Sia D un dominio euclideo rispetto alla valutazione $v : D - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$. Mostrare che:
   (a) $v(1) \leqslant v(a)$, per ogni $a \in D - \{0\}$;
   (b) $a \in D - \{0\}$ è invertibile se e solo se $v(a) = v(1)$;
   (c) se $a, b \in D - \{0\}$ sono associati in D, allora $v(a) = v(b)$;
   (d) se $a, b \in D - \{0\}$ sono sono tali che a divide b e $v(a) = v(b)$, allora a e b sono associati;
   (e) se $a, b \in D - \{0\}$ e b non è invertibile, allora $v(a) < v(ab)$.
10. Siano D e D' domini d'integrità. Provare che se $\varphi : D \longrightarrow D'$ è un omomorfismo unitario suriettivo e D è un PID, allora anche D' è un PID.

    Dedurne che $\mathbb{Z}_n$ è un PID per ogni $n \geqslant 2$.