Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato 3 (31 ottobre 2006)
Stefano Urbinati

1. Sia $f : (\mathbb{Z}_{18}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$ l'omomorfismo definito da $f([1]_{18} = [10]_{12}$.
   (a) Trovare il nucleo $\ker(f)$ e l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ di f.
   (b) Elencare gli elementi di $\mathbb{Z}_{18}/\ker(f)$, mostrando gli elementi in ciascuna classe laterale.
   (c) Dare esplicitamente l'esempio di un omomorfismo da $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{18}$.

2. Sia φ un isomorfismo da un gruppo G in un gruppo G'; provare che $(\varphi(g))^n = e'$ se e solo se $g^n = e$. Cosa si può dire se φ è un omomorfismo?

3. Sia X un G-insieme ed $x \in X$. Dimostrare che per ogni $g \in G$ si ha che:
$$\mathrm{St}_{g\star x} = g\mathrm{St}_x g^{-1}.$$

4. Provare che in ogni gruppo G l'insieme di tutti gli elementi i cui coniugati sono in numero finito è un sottogruppo.

5. Trovare il numero dei coniugati dell'elemento di (13) di D_4.

6. Sia G un gruppo finito con esattamente due classi coniugate. Provare che $|G| = 2$.

7. Sia H il sottogruppo ciclico di S_8 generato da (13574). H agisce come un gruppo di trasformazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Calcolare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

8. Sia H il sottogruppo di S_8 generato da (123)(45) e (78). H agisce come un gruppo di trasformazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Calcolare l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di X.

9. (a) Descrivere l'orbita e lo stabilizzatore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ quando il gruppo $GL_2(\mathbb{R})$ agisce per coniugazione su se stesso.
   (b) Se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_3)$, trovare il numero degli elementi della sua orbita quando il gruppo $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ agisce per coniugazione su se stesso

10. Sia H un sottogruppo di un gruppo G.
    (a) Verificare che la formula
$$(h, h') \star x = hx(h')^{-1}$$
    definisce una azione di $H \times H$ su G.

(b) Sia H un sottogruppo finito; provare che H è normale se e solo se ogni orbita di questa azione contiene esattamente $|H|$ elementi.

11. Provare che se un gruppo finito G ha un sottogruppo normale N tale che $|N| = 3$ ed $N \not\subseteq Z(G)$, allora G ha un sottogruppo K di indice 2.