Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Tutorato 1 (4 ottobre 2006)
Stefano Urbinati

1. Siano $(G, \star)$ un gruppo e a, b suoi elementi. Provare che $(a \star b)^{-1} = a^{-1} \star b^{-1}$ se e solo se $a \star b = b \star a$.

2. Provare che se G è un gruppo con elemento neutro e e tale che $x \star x = e$ per ogni $x \in G$, allora G è abeliano.

3. Siano x e g elementi di un gruppo G. Utilizzando il principio di induzione, provare che per ogni intero positivo n si ha che :
$$(x^{-1}gx)^n = x^{-1}g^n x.$$
Dedurne che g e $x^{-1}gx$ hanno lo stesso ordine.

4. Scrivere almeno 4 elementi per ciascuno dei seguenti sottogruppi ciclici:
   (a) $21\mathbb{Z}$ rispetto all'addizione;
   (b) $\{(\frac{1}{5})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla moltiplicazione;
   (c) $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla moltiplicazione.

5. Trovare l'ordine dei seguenti elementi:
   (a) $[3]_{20} \in \mathbb{Z}_{20}$;
   (b) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} \in \mathcal{C}_8$;
   (c) $[3]_{20} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20})$.

6. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi H sono sottogruppi del gruppo assegnato G:
   (a) $G = \mathbf{S}_3$, $H = \{id, (12), (13), (23)\}$;
   (b) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$;
   (c) $G = GL_2(\mathbb{R})$,
   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1, \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Nel gruppo $GL_2(\mathbb{Q})$ sono assegnati gli elementi
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Determinare l'ordine di a e quello di b e provare che ab è aperiodico.

8. Siano G un gruppo ed a, b suoi elementi tali che $ab = ba$. Provare che se a è di ordine m, b è di ordine n con m ed n primi tra loro, allora ab è di ordine mn.

9. Siano G un gruppo ed H un suo sottoinsieme non vuoto, *finito* e chiuso rispetto alla operazione di G. Provare che H è un sottogruppo di G.

10. Provare che se H e K sono due sottogruppi propri di un gruppo G, allora $H \cup K$ è un sottoinsieme proprio di G.

11. Sia G un gruppo ciclico di ordine 20; determinare tutti i suoi sottogruppi.

12. Siano G un gruppo ciclico di ordine 231 e g un suo generatore ; sia H il sottogruppo di G generato da g^{63} e da g^{99}. Determinare un intero positivo n tale che $H = \langle g^n \rangle$.