Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2006/2007
AL2 - Algebra 2
Esercitazione 1
Giovedì 5 Ottobre 2006

1. Si consideri il gruppo diedrale D_n. Sia ρ la rotazione di angolo $2\pi/n$ e σ una riflessione rispetto ad un qualsiasi asse di simmetria dell' n-gono regolare. Esprimere il prodotto $\tau = \rho^2\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^3\sigma^3$ nella forma 'standard' $\rho^m\sigma^k$ con $0 \leq m \leq n-1$ e $0 \leq k \leq 1$.

   σ è di ordine 2. Perciò $\rho^2\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^3\sigma^3 = \rho^2\sigma\rho^{-1}\sigma\rho^3\sigma$. Da quanto visto durante l'esercitazione, $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$, per cui più in generale, per induzione, si dimostra che $\rho^t\sigma = \sigma\rho^{-t}$ $\forall t \in \mathbb{Z}$. Quindi $\rho^2\sigma\rho^{-1}\sigma\rho^3\sigma = \rho^2\rho\sigma\sigma\rho^3\sigma = \rho^6\sigma$.

   Ricordando che, in generale, dato che ρ ha ordine n, $\rho^t = \rho^s \Leftrightarrow t \equiv_n s$, si ha: $\forall n \geq 7$ $\tau = \rho^6\sigma$, per $n = 3, 6$ $\tau = \sigma$, per $n = 5$ $\tau = \rho\sigma$, per $n = 4$ $\tau = \rho^2\sigma$.

2. Trovare il centro di S_n, $Z(S_n)$, per ogni $n \geq 3$.

   Per definizione, dato un qualsiasi gruppo G, $g \in Z(G) \Leftrightarrow \forall h \in G$ $hgh^{-1} = g \Leftrightarrow g$ è coniugato solo a se stesso. Ma, per quanto visto durante l'esercitazione, due permutazioni di S_n sono coniugate se, e solo se, hanno la stessa struttura ciclica: in particolare l'unica classe coniugata di S_n che ha un solo elemento è la classe dell'identità, cioé $Z(S_n) = \{1\}$.

3. Sia G un gruppo e sia $g \in G$. Si definisce $C_G(g)$, il centralizzante di g in G, l'insieme $\{h \in G \ t.c. \ hgh^{-1} = g\}$. In altre parole il centralizzante di g è l'insieme degli elementi di G che commutano con g.

   (a) Dimostrare che $C_G(g)$ (con la stessa operazione di G) è un gruppo.

   (b) Se G è un gruppo finito dimostrare che il numero dei coniugati di g è uguale all'indice di $C_G(g)$ in G, $i_G(C_G(g))$.

   (c) Usando il punto precedente trovare tutti gli elementi di $H = S_n$ che commutano con l'n-ciclo $\tau = (1\ 2 \ldots n-1\ n)$.

   (a) Per far vedere che $C_G(g) \leq G$ basta dimostrare che $\forall a \in C_G(g)$, $a^{-1} \in G$ e che $\forall b, c \in C_G(g)$, $bc \in C_G(g)$. Nel primo caso: $aga^{-1} = g \Rightarrow a^{-1}aga^{-1}a = a^{-1}ga \Rightarrow a^{-1}ga = g \Rightarrow a^{-1} \in C_G(g)$. Nel secondo caso: $bcgc^{-1}b^{-1} = b(cgc^{-1})b^{-1} = bgb^{-1} = g \Rightarrow bc \in C_G(g)$.

   (b) Per definizione l'indice di un gruppo è il numero delle sue classi laterali sinistre (oppure destre). Cerchiamo quindi di definire una biiezione f tra l'insieme A delle classi laterali sinistre di $C_G(g)$ in G e l'insieme B dei coniugati di g. Sia $hC_G(g) \in A$: definiamo $f(hC_G(g)) = hgh^{-1}$. Prima di tutto dobbiamo far vedere che f è ben definita: se $hC_G(g) = \bar{h}C_G(g)$ allora $\bar{h}^{-1}h \in C_G(g)$ e quindi $h^{-1}\bar{h}g\bar{h}^{-1}h = g \Rightarrow \bar{h}g\bar{h}^{-1} = hgh^{-1}$. La suriettività di f è ovvia. Facciamo vedere l'iniettività: $hgh^{-1} = \bar{h}g\bar{h}^{-1} \Rightarrow \bar{h}^{-1}hgh^{-1}\bar{h} = g \Rightarrow \bar{h}^{-1}h \in C_G(g) \Rightarrow hC_G(g) = \bar{h}C_G(g)$. Quindi f è effettivamente una biiezione e, per il teorema di Lagrange, possiamo concludere che $|B| = |G|/|C_G(g)|$.

(c) Gli elementi che commutano con τ sono gli elementi di $C_H(\tau)$. Se k è il numero degli elementi coniugati con τ, per il punto precedente $|C_H(\tau)| = |H|/k$. Per quanto visto durante il lavoro guidato, $k =$ numero degli n-cicli in S_n, cioé $k = (n-1)!$ e perciò $|C_H(\tau)| = n$. Siccome τ è un elemento di ordine n e chiaramente $\langle\tau\rangle \subseteq C_H(\tau)$ allora $\langle\tau\rangle = C_H(\tau)$ cioé gli elementi che commutano con τ sono tutte e sole le potenze di τ.

4. Trovare il centro di $H = D_n$, gruppo diedrale, per ogni $n \geq 3$.

   H è generato da ρ e σ (cfr. esercizio 1). Perciò $Z(H) = C_H(\rho) \cap C_H(\sigma)$. ρ non commuta con σ e quindi neanche con $\rho^m\sigma$ per ogni m. Perciò $C_H(\rho) = \langle\rho\rangle$. Sia $a = \rho^t \in \langle\rho\rangle$. $\rho^t\sigma = \sigma\rho^t \Leftrightarrow \rho^{2t} = 1 \Leftrightarrow 2t = n$. Perciò se n è dispari $Z(D_n) = \{1\}$, se n è pari $Z(D_n) = \{1, \rho^{n/2}\}$.