UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2006/2007
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
APPELLO B
13 febbraio 2007

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli **giustificando tutte le affermazioni fatte**.

1. **(2 pt+2 pt+3 pt=7 pt)**

   Siano $(G, \cdot)$ un gruppo ciclico con 30 elementi e g un suo generatore.

   (a) Elencare tutti i generatori di G.

   (b) Provare che l'applicazione $f : G \longrightarrow G$ definita da $f(x) = x^7$ è un automorfismo di G e determinare l'ordine di f in $(Aut(G), \circ)$.

   (c) Stabilire se $(Aut(G), \circ)$ è un gruppo ciclico oppure no.

2. **(3 pt+2 pt+1pt=6 pt)**

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo ed unitario e sia

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ a \in A \quad | \quad a = a^2 \right\}.$$

Si consideri in $\mathcal{E}(A)$ la seguente operazione $*$:

$$a * b = a + b - 2ab$$

per ogni $a, b \in \mathcal{E}(A)$.

(a) Verificare che $(\mathcal{E}(A), *)$ è un gruppo abeliano.

(b) Elencare gli elementi di $(\mathcal{E}(\mathbb{Z}_{12}), *)$ e stabilire a quale gruppo noto è isomorfo.

(c) Elencare gli elementi di $(\mathcal{E}(\mathbb{Z}_p), *)$ con p numero primo.

3. **(2 pt+2 pt+2 pt+2pt=8 pt)**

   (a) Trovare il MCD di $11 + 3i$ e $8 - i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

   (b) Sia d un numero intero $\neq 0, \neq 1$, e privo di fattori quadratici. Provare che 2 non è primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. (Sugg: 2 divide $d^2 - d$ in $\mathbb{Z}$)

   (c) Provare che se $d \leqslant -3$ è un numero intero privo di fattori quadratici, allora 2 è irriduciblile in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   (d) Tenendo conto di (b) e (c), cosa si può dire del dominio $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se $d \leqslant -3$ è un numero intero privo di fattori quadratici?

4. **(2 pt+1 pt+2 pt+2pt+2 pt=9 pt)**

Stabilire se i seguenti anelli sono isomorfi oppure no, motivando la risposta:

(a) $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{Z}[X]$;

(b) $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{R}[X]$;

(c) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$;

(d) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2-\overline{3})$ e $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2-\overline{3}X+\overline{4})$;

(e) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2-\overline{3})$ e $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2-\overline{2}X)$.