Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 3 (10 ottobre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Si considerino le seguenti applicazioni:
   $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + 1$,
   $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$,
   $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \sin x$.
   (a) Dire quali applicazioni sono iniettive, suriettive, biiettive.
   (b) Determinare l'immagine di ogni applicazione.

2. Siano X, Y e Z insiemi ed $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ applicazioni. Verificare che se f e g sono biiettive, anche $g \circ f$ è biiettiva e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. Se $x \in \mathbb{R}$, sia $[x]$ il più grande intero minore o uguale ad x, detto anche **parte intera di** x. Siano le applicazioni $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite nel modo seguente:
   $$g(z) := 2z, \qquad f(z) := [z/2].$$
   (a) Descrivere l'applicazione $g \circ f$ e dire se essa è uguale a $f \circ g$.
   (b) Cosa si può dire sulle proprietà di iniettività e di suriettività di f e di g?

4. Sia X un insieme con 3 elementi.
   (a) Stabilire quante relazioni (binarie) si possono considerare in X.
   (b) Stabilire quante di esse sono relazioni d'equivalenza.

5. Sia X un insieme con $n > 1$ elementi. Stabilire quante sono le relazioni d'equivalenza in X con 2 classi d'equivalenza.

6. Nell'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si consideri la seguente relazione:
   $$A\sigma B \iff A - B \text{ è un insieme finito.}$$
   Stabilire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva e totale sono soddisfatte da σ.

7. Nell'insieme $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si consideri la seguente relazione
   $$x\sigma y \quad \Leftrightarrow \quad x|y \text{ in } \mathbb{Z}, \text{ (cioè esiste } c \in \mathbb{Z}, \text{ tale che } xc = y).$$
   (a) Stabilire di quali delle seguenti proprietà gode la relazione σ:
      i. riflessiva

ii. simmetrica
iii. antisimmetrica
iv. transitiva
v. totale.

(b) Nell'insieme X si consideri la seguente relazione ρ:

$$x \rho y \quad \Leftrightarrow \quad x \sigma y \text{ e } y \sigma x.$$

Verificare che ρ è una relazione di equivalenza su X e determinare le classi di equivalenza modulo ρ.

(c) Stabilire se la relazione σ' definita in X/ρ nel seguente modo:

$$[x]_\rho \sigma' [y]_\rho \quad \Leftrightarrow \quad x \sigma y,$$

è una relazione d'equivalenza.

8. Siano

$$\mathbf{S^1} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} = \mathbf{1}\right\}$$

(circonferenza del piano euclideo di raggio 1 e centro nell'origine)

e

$$\mathbf{S} = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} + \mathbf{y} = \mathbf{0}\right\}$$

(circonferenza del piano euclideo di raggio $\frac{1}{2}$ e centro $(0, -\frac{1}{2})$.

(a) Sia $\psi : \mathbf{S^1} \longrightarrow \mathbf{S}$ l'applicazione definita da $\psi(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2})$; verificare che ψ è biiettiva; determinare ψ^{-1}.

(b) Sia $\varphi : \mathbf{S^1} \longrightarrow \mathbf{S}$ l'applicazione definita da $\varphi(x, y) = (-xy, -y^2)$. Verificare che φ è suriettiva.

(c) Verificare che $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ se e solo se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ o $x_2 = -x_1$ e $y_2 = -y_1$. Qual è il significato geometrico di questo fatto?

(d) Cosa si può dire dell'insieme quoziente di $\mathbf{S^1}$ modulo la relazione nucleo di φ?