Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato 1 (26 settembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 30\}$. Siano $B = \{x \in A \mid x = 3n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in A \mid x = 5m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$.

   Determinare $B \cup C$, $B \cap C$, $B - C$, $B \times C$ e $B \Delta C$.

2. Siano $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{Z} \mid y^4 - 8y^3 + 22y^2 - 24y + 9 = 0\right\}$.

   Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $A \times B$.

3. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 20n \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 50m \text{ con } m \in \mathbb{Z}\}$. Determinare $A \cap B$.

4. Siano r ed s numeri naturali positivi. Siano

$$A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = rn \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$$

$$A_s = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = sm \text{ con } m \in \mathbb{Z}\}.$$

   Determinare $A_r \cap A_s$.

5. Siano $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 10x + 16 \leq 0\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 4 \geq 0\}$. Determinare $A \Delta B$.

6. Siano X un insieme non vuoto, A e B suoi sottoinsiemi;verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   (a) $A \subseteq B$;
   (b) $A \cup B = B$;
   (c) $A \cap B = A$;
   (d) $A \cap \mathcal{C}B = \emptyset$;
   (e) $\mathcal{C}B \subseteq \mathcal{C}A$;
   (f) $A - B = \emptyset$.

7. Siano X un insieme non vuoto, A e B suoi sottoinsiemi; dimostrare che:

   (a) $A \cap B \subseteq A \cup B$;
   (b) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$;
   (c) $\mathcal{C}A \subseteq B$ e $\mathcal{C}A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$; è vero il viceversa?
   (d) $\mathcal{C}(A \cap \mathcal{C}B) \cup B = \mathcal{C}A \cup B$;
   (e) $B = (A \cap \mathcal{C}B) \cup (\mathcal{C}A \cap B) \Longleftrightarrow A = \emptyset$;
   (f) $A - B = \mathcal{C}B - \mathcal{C}A = A \cap \mathcal{C}B$.
   (g) $A = B \Longleftrightarrow \mathcal{C}B = \mathcal{C}A$.

8. Siano X un insieme non vuoto, A, B e C suoi sottoinsiemi; dimostrare che:

   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

   (c) $A \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cap (B \cup C) = A \cap B$;

   (d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;

   (e) $A \cap B \subset \mathcal{C}C\,,\, A \cup C \subset B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;

   (f) $A \subseteq \mathcal{C}(B \cup C)\,,\, B \subseteq \mathcal{C}A \cup C) \Rightarrow B = \emptyset$;

9. Siano $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,5,7,9\}$, $C = \{a,b\}$. Trovare $(C \times A) \cap (C \times B)$, $A \times (B \cap C)$ e $A \times (B \cup C)$.

10. Trovare per quali numeri reali x e y si ha che $(x+y,-1) = (2, x-2y)$.

11. Siano $\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ proposizioni; provare che:

    (a) $\neg(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \iff \mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q}$;

    (b) $\neg(\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}) \iff (\mathbf{P} \Leftrightarrow \neg\mathbf{Q})$;

    (c) $(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \iff (\mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{R} \wedge \neg\mathbf{R})$.