

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamentali
Tutorato 11 (12 dicembre 2005)
A. Fabbri - G. Fusacchia

1. Trovare tutti i numeri primi dispari p per i quali $X - \bar{2}$ è un fattore di $X^4 + X^3 + X^2 - X + \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_p[X]$.
2. Utilizzando il teorema del resto, stabilire se $X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ divide in $\mathbb{Q}[X]$ i seguenti polinomi: $X^3 - 4X$, $X^2 + 2X - 1$, $X^{100} - 4X^{98} + X + 2$.
3. Siano $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ed $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Provare che $\alpha X + \beta$ divide $f(X)$ se e solo se $X + \frac{\beta}{\alpha}$ divide $f(X)$.
4. Utilizzando il teorema del resto, stabilire se in $\mathbb{Q}[X]$:
 - (a) $X - 2$ divide $X^5 - 4X^4 - 4X^3 - X^2 + 4$;
 - (b) $2X - 1$ divide $X^5 + 2X^4 - 3X^2 + 1$.
5. Trovare tutte le radici di:
 - (a) $f(X) = X^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_2[X]$
 - (b) $g(X) = X^3 + \bar{2}X + \bar{2}$ in $\mathbb{Z}_7[X]$
 - (c) $f(X)g(X)$ dove $f(X) = X^3 + X^2 + \bar{5}$ e $g(X) = \bar{3}X^2 + \bar{2}X$ in $\mathbb{Z}_7[X]$.
6. Provare che per ogni numero naturale $n \geq 2$ il polinomio $X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ non ha radici razionali.
7. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$:
 - (a) $X^2 + 2$, $X^2 - 2$, $X^2 + 2X + 8$;
 - (b) $X - \frac{2}{5}$, $2X - 5$;
 - (c) $X^3 - 2$, $3X^3 + 2X + 1$;
 - (d) $X^4 - 5X + 4$, $X^4 + 1$.
8. Sia p un numero primo; provare che per ogni $a \in \mathbb{Z}$ il polinomio $X^p + \bar{a}$ è *irriducibile* in $\mathbb{Z}_p[X]$.
9. Decomporre in fattori irriducibili il polinomio $X^3 - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$, in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.