UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Seconda prova di valutazione intermedia
11 gennaio 2006

*Cognome*___________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

1. **(3+5 pt)**

   (a) Determinare tutte le eventuali soluzioni della congruenza

   $$14X \equiv 63 \qquad \mathrm{mod} 385.$$

   (b) Risolvere il seguente sistema di congruenze permutazioni

2. **(6 pt)** Sia $\mathbb{Q}^+$ l'insieme dei numeri razionali positivi; in $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ si consideri la seguente operazione $\star$: se $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

$$(a,b) \star (c,d) = (\frac{ac}{7}, 3bd).$$

   (a) Provare che $(\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+, \star)$ un gruppo.

   (b) Determinare l'unica soluzione della seguente equazione:

$$(2,5) \star X = (4,11).$$

3. **(6 pt)** Si considerino i seguenti anelli:

   (a) $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$;
   (b) $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$;
   (c) $(\mathbb{Z}_8[X], +, \cdot)$;
   (d) $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$;
   (e) $A = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot)$.

   (a) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.
   (b) Per ciascuno dei domini d'integritá D del punto precedente, determinare l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili $U(D)$.

4. **(2+4 pt)** Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{Q}[X]$:

$$f(X) = 2X^4 - 7X^3 + 5X^2 - 7X + 3, \;\; g(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1.$$

(a) Determinare tutte le eventuali radici in $\mathbb{Q}$ di $f(X)$ e di $g(X)$.

(b) Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare in $\mathbb{Q}[X]$ il $\mathrm{MCD}(f(X), g(X))$ ed una identitá di Bézout per esso.

5. **(6 pt)** Decomporre in fattori irriducibili i seguenti polinomi:

(a) $X^4 + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$, in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$;

(b) $X^3 + \overline{4}X^2 + X - \overline{3}$ in $\mathbb{Z}_7[X]$;

(c) $X^4 + \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_3[X]$.