

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamentali
Prima prova di valutazione intermedia
5 novembre 2005

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti.

1. (5 pt) Siano \mathbf{P} e \mathbf{Q} proposizioni; provare che:

$$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \iff (\neg\mathbf{Q} \Rightarrow \neg\mathbf{P})$$

2. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$.

(a) Determinare $\text{Im}(g)$.

(b) Descrivere la relazione nucleo di g , \equiv_g .

(c) Determinare \mathbb{R} / \equiv_g .

3. (5 pt)

- (a) Usando l'Algoritmo Euclideo delle divisioni successive, calcolare il $\text{MCD}(2424, 772)$ ed una identità di Bézout.
- (b) Provare che il $\text{MCD}(a, b)$ divide $a - b$.
- (c) Utilizzando il punto (b), trovare il $\text{MCD}(1962, 1965)$ e il $\text{MCD}(1961, 1965)$.

4. (6 pt)

- (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

- (b) Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definita induttivamente come segue:

$$a_1 = 5, a_2 = 7 \text{ e, per ogni } n \geq 3, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Provare che $a_n = 3 + 2^n$ per ogni numero naturale $n \geq 1$.

5. **(5 pt)** Sia p un numero primo > 3 tale che $p + 2$ è primo. Provare che 12 divide $p + (p + 2)$.

6. **(5 pt)** Stabilire quali dei seguenti elementi di \mathbb{Z}/\equiv_n sono zero-divisori e quali sono invertibili; per ciascuno degli elementi invertibili trovare l'inverso:

$$[-29]_9, [-16]_6, [43]_{15}, [49]_{21}$$