UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2005/2006
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
Soluzione
5 novembre 2001

1. **(5 pt)** Siano **P** e **Q** proposizioni; provare che:

$$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Longleftrightarrow (\neg\mathbf{Q} \Rightarrow \neg\mathbf{P})$$

Soluzione

Ricordiamo le tabelle di verità di $\Rightarrow$ e di $\neg$.

Date P e Q due proposizioni si ha che:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	$\neg P$
V	F
F	V

Segue che:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Quindi $P \Rightarrow Q$ e $\neg Q \Rightarrow \neg P$ hanno la stessa tabella delle verità, quindi sono equivalenti.

2. **(6 pt)** Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$.

   (a) Determinare $\mathrm{Im}(g)$.

   (b) Descrivere la relazione nucleo di g, $\equiv_g$.

   (c) Determinare $\mathbb{R}/\equiv_g$.

   Soluzione

   Osserviamo che

$$g(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2$$

   (a)

$$\begin{aligned} \mathtt{Im}\, g &= \left\{y \in \mathbb{R} : y = g(x) = 2(x+1)^2 \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}. \end{aligned}$$

   (b) Ricordiamo che la relazione nucleo associata ad g è definita da

$$\begin{aligned} x \equiv_g y &\Leftrightarrow g(x) = g(y) \\ &\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 2(y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow |x+1| = |y+1| \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ o } y = -x-2. \end{aligned}$$

   Quindi

$$x \equiv_g y \Leftrightarrow y = x \text{ o } y = -x - 2$$

   (c) Cominciamo col descrivere la classe associata ad un elemento $x \in \mathbb{R}$,

$$[x]_{\equiv_g} = \{x, -x-2\}$$

   Quindi possiamo scegliere un rappresentante della classe di x nell'insieme $[-1, \infty)$, ne segue che:

$$\mathbb{R}/\equiv_g = \left\{[x]_{\equiv_g, x \in \mathbb{R}}\right\} \cong [-1, \infty) \cong \mathtt{Im}\, g.$$

3. **(5 pt)**

(a) Usando l'Algoritmo Euclideo delle divisioni successive, calcolare il MCD(2424, 772) ed una identità di Bézout.

(b) Provare che il MCD(a, b) divide $a - b$.

(c) Utilizzando il punto (b), trovare il MCD(1962, 1965) e il MCD(1961, 1965).

Soluzione

(a) Utilizzando l'algoritmo euclideo otteniamo

$$\begin{aligned} 2424 &= 772 \times 3 + 108 \\ 772 &= 108 \times 7 + 16 \\ 108 &= 16 \times 6 + 12 \\ 16 &= 12 \times 1 + 4 \\ 12 &= 4 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

Quindi $\texttt{MCD}(2424, 772) = 4$. Per ottenere l'identità di Bézout sostituiamo successivamente le equazioni precedenti

$$\begin{aligned} 4 &= 16 - 12 \\ 12 &= 108 - 16 \times 6 \\ 16 &= 772 - 108 \times 7 \\ 108 &= 2424 - 772 \times 3 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$4 = 772 \times 157 - 2424 \times 50$$

(b) Sia $d = \texttt{MCD}(a, b)$ allora $d|a$ e $d|b$ quindi $a = d \times k$ e $b = d \times h$, da cui

$$a - b = d \times k - d \times h = d(k - h)$$

Quindi $d|a - b$.

(c)
- Sia $d = \texttt{MCD}(1962, 1965)$ allora per il punto (b) $d|1965-1962 = 3$, quindi $d = 1$ o $d = 3$. Osserviamo che $3|1962$ e $3|1965$ quindi $d = 3$.
- Sia $d = \texttt{MCD}(1961, 1965)$ allora per il punto (b) $d|1965-1961 = 4$, quindi $d = 1$, $d = 2$ o $d = 4$. Osserviamo che $2, 4 \not| 1961$ e $2, 4 \not| 1965$ quindi $d = 1$.

4. **(6 pt)**

(a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha :

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

(b) Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definita induttivamente come segue:

$$a_1 = 5, \;\; a_2 = 7 \text{ e, per ogni } n \geq 3, \;\; a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Provare che $a_n = 3 + 2^n$ per ogni numero naturale $n \geq 1$.

Soluzione

(a) Verifichiamo l'ipotesi induttiva: per $n = 1$ si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3},$$
$$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Per induzione supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots &+ \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2n+3}\right) \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)(2n+3)}\left(n(2n+3) + 2(n+1)\right) \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)(2n+3)}\left(2n^2 + 5n + 2\right) \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)(2n+3)}\left(n+2\right)\left(2n+1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}
\end{aligned}$$

Quindi la formula è dimostrata

(b) Usiamo l'induzione forte. Verifichiamo la formula per $n = 1$ ed $n = 2$, si ha che

$$a_1 = 5 \text{ e } a_2 = 7,$$
$$3 + 2^1 = 5 \text{ e } 3 + 2^2 = 7.$$

Quindi per iduzione forte supponiamo che sia vera per ogni $i < n + 1$ e verifichiamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} \\ &= 3(3 + 2^n) - 2(3 + 2^{n-1}) \\ &= 9 - 6 + 3 \times 2^n - 2 \times 2^{n-1} \\ &= 3 + (3 - 1)2^n \\ &= 3 + 2^{n+1} \end{aligned}$$

Quindi la formula è dimostrata.

5. **(5 pt)** Sia p un numero primo > 3 tale che $p+2$ è primo. Provare che 12 divide $p+(p+2)$.

Soluzione

Osserviamo che:

(a) $p+(p+2) = 2(p+1) \Rightarrow 2|p+(p+2)$

(b) Poiché p è un numero primo maggiore di 3 $p+1$ è pari, dunque $2|p+1$

(c) Poiché p e $p+2$ sono numeri primi maggiori di 3 si ha che $3 \not| p$ e $3 \not| p+2$, quindi $3|p+1$, perché p, $p+1$ e $p+2$ sono tre rappresentanti distinti delle classi resto modulo 3.

Riassumendo $6|p+1$ e $12|p+(p+2)$.

6. **(5 pt)** Stabilire quali dei seguenti elementi di $\mathbb{Z}/\equiv_n$ sono zero-divisori e quali sono invertibili; per ciascuno degli elementi invertibili trovare l'inverso:

$$[-29]_9,\ [-16]_6,\ [43]_{15},\ [49]_{21}$$

Soluzione

- $[-29]_9 = [7]_9$, poiché $\mathtt{MCD}(7,9) = 1$ si ha che $[7]_9$ è invertibile e il suo inverso è $[4]_9$.
- $[-16]_6 = [2]_6$, poiché $\mathtt{MCD}(2,6) = 2$ si ha che $[2]_9$ è uno zero divisore.
- $[43]_{15} = [13]_{15}$, poiché $\mathtt{MCD}(13,15) = 1$ si ha che $[13]_{15}$ è invertibile e il suo inverso è $[12]_{15}$.
- $[49]_{21} = [7]_{21}$, poiché $\mathtt{MCD}(7,21) = 7$ si ha che $[7]_{21}$ è uno zero divisore.