Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TE1 - Teoria di Galois
Esercizi
20 aprile 2006

1. Sia $\epsilon = \pm 1$ mostrare che
$$\sqrt[3]{\epsilon + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{\epsilon - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = \epsilon$$

2. Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ monico di grado 3 il cui discriminante è quadrato in $\mathbb{Q}$. Mostrare che se f è riducibile su $\mathbb{Q}$ allora f possiede 3 radici razionali.

3. Sia K un campo e Ω la sua chiusura algebrica. Siano α e $\beta \in \Omega$. Siano q_α e q_β i polinomi minimi di α e β, poniamo E_α e E_β i loro campi di spezzamento. Mostrare che:
   (a) Se $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ allora $E_\alpha \subseteq E_\beta$.
   (b) Se $K(\alpha) = K(\beta)$ allora $E_\alpha = E_\beta$.
   (c) Il viceversa non è vero.

4. (a) Mostrare che il polinomio $f(x) = x^3 + x + 3$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$. Sia α la sua radice reale. Trovare l'espressione di:
$$\gamma = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}.$$
nella base 1, α e α^2 di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\alpha)$ e calcolare il polinomio minimo di γ.
   (b) Mostrare che il campo $K = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-247})$ è il campo di decomposizione di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$. Dedurne il valore di $[K : \mathbb{Q}]$.
   (c) Mostrare che il polinomio $g(x) = x^2 - 2$ è irriducibile su $\mathbb{Q}(\alpha)$. E dedurne che $[\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 6$. Calcolare
$$\mu = \frac{1}{\alpha + \sqrt{2}}$$
nella base canonica di $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2})$. Studiare l'intersezione:
$$K \cap \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2}).$$