Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TE1 - Teoria di Galois
Esercizi
27 marzo 2006

1 Campi finiti

1. Consideriamo $p(x) = x^2 + x + 1$ e $q(x) = x^2 - x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$. Poniamo $K = \mathbb{F}_5[x]/(p)$ e $E = \mathbb{F}_5[x]/(q)$. Dimostrare che:
   (a) K e E sono campi.
   (b) K è isomorfo ad E.
2. Consideriamo $p(x) = x^2 + 1$ e $q(x) = x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$. Poniamo $K = \mathbb{F}_7[x]/(p)$ e $E = \mathbb{F}_7[x]/(q)$. Dimostrare che:
   (a) K e E sono campi.
   (b) K è isomorfo ad E.
3. Consideriamo $p(x) = x^3 + x + 1$ e $q(x) = x^3 + 4x + 1 \in \mathbb{F}_7[x]$. Poniamo $K = \mathbb{F}_7[x]/(p)$ e $E = \mathbb{F}_7[x]/(q)$. Dimostrare che:
   (a) K e E sono campi.
   (b) K è isomorfo ad E.

2 Gruppo di Galois

1. Calcolare il gruppo di Galois, $Gal_F(K)$ con:
   (a) $F = \mathbb{Q}(i)$ e $K = F(\sqrt[4]{2})$.
   (b) $F = \mathbb{Q}$ e $K = F(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
   (c) $F = \mathbb{Q}$ e $K = F(e^{\frac{2\pi i}{3}})$.
   (d) $F = \mathbb{Q}$ e $K = F(\sqrt[3]{2})$.