

Università degli studi di Roma Tre  
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006  
TE1 - Teoria di Galois  
Esercizi  
20 marzo 2006

## 1 Gruppo di Galois

1. Calcolare i seguenti gruppi di Galois:
  - (a)  $Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ .
  - (b)  $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}), \mathbb{Q})$ .
2. Determinare il gruppo di Galois di  $\alpha$  radice  $n$ -esima primitiva dell'unità per  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

## 2 Supplementi

1. Sia  $K$  un campo di caratteristica 0,  $K(X)$  il campo delle funzioni razionali di  $K$ . Mostrare che  $\rho : K(X) \rightarrow K(X)$  definita da

$$\rho(f)(X) = f(X + 1)$$

è un automorfismo di  $K(X)$ .

2. Sia  $\theta$  una radice di

$$f(X) = X^3 - 3X + 1$$

e  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ .

- (a) Verificare che  $\theta^2 - 2$  è una radice di  $f$  e determinare  $Gal(K, \mathbb{Q})$
- (b) Sia  $\beta = \frac{1}{\theta^2 + \theta - 2}$  scrivere  $\beta$  nella base  $1, \theta, \theta^2$  di  $K$  su  $\mathbb{Q}$ . Determinare il polinomio minimo di  $\beta$  su  $\mathbb{Q}$ .