Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2005/2006
TE1 - Teoria di Galois
Esercizi
13 marzo 2006

1 Estensione di campi

1. Sia $\mathbb{K}$ un campo ed $\mathbb{E}$ un'estensione algebrica di $\mathbb{K}$. Sia A un anello tale che $\mathbb{K} \subset A \subset \mathbb{E}$. Dimostrare che A è un campo.
2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Verificare che $[\mathbb{K}, \mathbb{Q}] = 3$. Utilizzando
$$2(x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz) = (x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2],$$
trovare l'inverso di $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, con a, b e $c \in \mathbb{Q}$ non tutti nulli.
3. Sia $\mathbb{K}$ una estensione di $\mathbb{Q}$ tale che 5 non divide $[\mathbb{K}, \mathbb{Q}]$. Mostrare che $f(x) = x^5 + 2x + 2$ è irriducibile su $\mathbb{K}$
4. Costruire l'estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ generata da $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
5. Sia $f(x) = x^4 - 9$
   (a) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice di f. l'estensione $\mathbb{Q}(\alpha)$ di $\mathbb{Q}$ è normale ?
   (b) Trovare il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$.

2 Supplementi

1. Sia $\mathbb{K}$ un campo e
$$z = \frac{x^3}{x+1} \in \mathbb{K}(x)$$
Mostrare che $\mathbb{K}(x)$ è una estensione algebrica di grado 3 di $\mathbb{K}(z)$
2. Poniamo $\mathbb{R}_{alg}$ il sottoinsieme dei numeri reali algebrici u $\mathbb{Q}$ e con $\overline{\mathbb{Q}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. Mostrare che $\mathbb{R}_{alg}(i) = \overline{\mathbb{Q}}$.