Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2005/2006
AL2 - Algebra 2, gruppi, anelli e campi
Prima prova di valutazione intermedia
5 Novembre 2005

*Cognome*__________________ *Nome*__________________

*Numero di matricola*__________________________

Avvertenza: Svolgere il maggior numero di esercizi nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Per raggiungere la sufficienza, e necessario svolgere almeno uno tra gli esercizi segnati con un asterisco e totalizzare almeno 20 punti.

1. (2 pti) Determinare la decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine e la parità della permutazione
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_9.$$
2. (3 pti) Scrivere esplicitamente le radici complesse seste dell'unità nella forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
3. (6 pti) Determinare i generatori, i sottogruppi ed i gruppi quozienti del gruppo $\mathbb{Z}_{12}$.
4. (6 pti) Costruire tutti i possibili automorfismi del gruppo delle unità di $\mathbb{Z}_9$.
5. ($\star$) (8 pti) Determinare almeno un omomorfismo non nullo
$$\varphi : \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{30}.$$
Determinare il nucleo N e l'immagine H di φ e defire l'isomorfismo canonico
$$\frac{\mathbb{Z}_{18}}{N} \to H.$$
6. ($\star$) (10 pti) Mostrare che l'applicazione
$$Re : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)\,, \quad z := a + bi \mapsto Re(z) := a$$
è un omomorfismo di gruppi.
Determinare il nucleo N e l'immagine H di Re e defire l'isomorfismo canonico
$$\frac{\mathbb{C}}{N} \to H.$$
7. ($\star$) (8 pti) Mostrare che l'applicazione di coniugio complesso
$$(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)\,, \quad z \mapsto \bar{z}$$
è un automorfismo di gruppi.
Verificare inoltre che, se ξ è una radice n-sima dell'unità, allora $\overline{\xi^k} = \xi^{n-k}$, per ogni $0 \le k \le n-1$.
8. (6 pti) Sia G un gruppo moltiplicativo. Dimostrare che l'applicazione
$$\varphi : G \to G\,, \quad g \mapsto g^{-1}$$
è biiettiva ed è un isomorfismo se e soltanto se G è commutativo.