Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 6

1. Sia $a \in \mathbb{C}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli
$$v_a : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, f(X) \to f(a) \ .$$
Determinare esplicitamente il nucleo e l'immagine di v_a quando
$$a = 3\sqrt{4}\,,\ a = 3 + 2i\,,\ a = e\,,\ a = \sqrt{\pi + 1}.$$
In quali casi $\mathrm{Im}(v_a)$ è un campo?

2. Sia $A := \mathbb{Q}[X]/I$, dove $I := (X^2 - 5X + 6)$.
Stabilire se i seguenti elementi di A sono invertibili e, in caso affermativo, determinarne l'inverso:
$$(X - 1) + I\,;\ (2X - 1) + I\,;\ (X - 3) + I\,.$$

3. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.
Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.

4. Sia fissata la matrice : $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ e sia $I = \alpha^0$ la matrice identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
Si consideri l'applicazione:
$$\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\,, \quad \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \to \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i.$$
Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli ed esplicitare $\mathrm{Im}(\phi)$ e $\mathrm{Ker}(\phi)$. Stabilire infine se $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

5. Sia K uno dei seguenti campi. Determinare esplicitamente (in forma generica) gli elementi di K ed una base di K su $\mathbb{Q}$:
$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)\,;\ \mathbb{Q}(\xi)$ (dove ξ è una radice primitiva terza dell'unità) ; $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})\,;\ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{3})$.

6. Sia A un dominio e sia I un ideale di A. Mostrare che

(a) L'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$.

(b) Se P è un ideale primo di A, l'ideale $P[X]$ è primo in $A[X]$. In particolare, un elemento primo di A è primo anche in $A[X]$.

(Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A[X] \longrightarrow \frac{A}{P}[X]$ definito da $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \to (a_0 + P) + (a_1 + P)X + \ldots + (a_n + P)X^n$)

7 Sia K un campo e sia $A = \frac{K[X,Y,Z]}{I}$, dove I è l'ideale principale di $K[X, Y, Z]$ generato dal polinomio $XY - Z^2$.

Mostrare che gli elementi X, Y e Z sono primi in $K[X, Y, Z]$, mentre le classi di X, Y e Z sono elementi irriducibili ma non primi in A.

8. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.

9. Sia $t \in \mathbb{Z}$ tale che $\mid t \mid$ non abbia fattori quadratici e sia $\mathbb{Z}[\sqrt{t}] = \{a + b\sqrt{t} \mid a; b \in \mathbb{Z}\}$. Se $\alpha = a + b\sqrt{t}$, definiamo la *norma* di α come $N(\alpha) = (a + b\sqrt{t})(a - b\sqrt{t}) = a^2 - b^2t$.

Mostrare che:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$;

(c) $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ è invertibile se e soltanto se $N(\alpha) = \pm 1$;

(d) $\alpha, \beta \in Z[\sqrt{t}]$ sono associati se e soltanto se α divide β e $N(\alpha) = N(\beta)$;

(e) Se $\mid N(\alpha) \mid$ è un numero primo, allora α è irriducibile in $Z[\sqrt{t}]$;

(f) 7 è irriducibile in $Z[\sqrt{5}]$ (benché $N(7) = 49$ non sia primo).

10. Determinare i fattori irriducibili di 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

11. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

12. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2 + i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

Dimostare poi che gli elementi 10 e $4 + 2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?

13. Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo. Mostrare che l'applicazione:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(p)} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}p[X]}{(X^2+1)} \text{ definita da } (a + bi) + (p) \to (\bar{a} + \bar{b}X) + (X^2 + 1)$$

è un isomorfismo di anelli.

Dedurne che p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}p[X]$.

Quindi, se p è irriducibile in $\mathbb{Z}[i]$, $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(p)}$ è un campo con p^2 elementi.

14. Secondo Esonero 2004/2005

1. Sia $A = \left\{ \frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \text{ e } 5 \nmid b \right\}$
   (a) Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
   (b) Determinare gli elementi invertibili di A.
   (c) Sia $\phi : A \to \mathbb{Z}_5$ definita da
   $$\phi\left(\frac{a}{b}\right) = \overline{a}\overline{b}^{-1}.$$
   Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di anelli e applicare il teorema di omomorfismo.
   (d) (*facoltativo*) Usando il punto 1b, mostrare che $\ker \phi$ è l'unico ideale massimale di A

2. Sia $p(X) = X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$:
   (a) Dimostrare che $K = \mathbb{Z}_7[X] / (p(X))$ è un campo.
   (b) Descrivere esplicitamente gli elementi di K.
   (c) Determinare l'inverso di $X^3 + \overline{5}X + \overline{6} + (p(X))$ in K.

3. Sia $\alpha = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$.
   (a) Mostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.
   (b) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(i)$.
   (c) Costruire il campo $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ e determinare una sua base su $\mathbb{Q}$ come spazio vettoriale.

4. Dimostrare che in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ l'elemento $\alpha = 10$ ha due fattorizzazioni distinte in elementi irriducibili non associati.

15. Recupero Secondo Esonero 2004/2005

1. Sia $v_3 : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da:
   $v_3(x) = n$ se 3^n divide x e 3^{n+1} non divide x.

   Posto
   $$A = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}\, ; v_3(x) - v_3(y) \geq 0\} \cup \{0\},$$

   (a) Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;

   (b) Determinare il gruppo degli elementi invertibili di A;

   (c) Mostrare che $3A$ è l'unico ideale massimale di A.

2. Determinare gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{(6)}$.

3. Sia $F = \mathbb{Q}(\pi^2)$.

   (a) Descrivere gli elementi di F;

   (b) Mostrare che π è algebrico su F e determinare il suo polinomio minimo su F.

4. Si consideri l'insieme $A = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ in cui sono definite le seguenti operazioni:

   $$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')\ ; \quad (a, b)(a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b).$$

   Rispetto a queste operazioni, A è un anello commutativo unitario con unità $1 = (1, 0)$.

   (a) Dimostrare che l'applicazione

   $$\varphi : \mathbb{Z}_7[X] \longrightarrow A \text{ definita da } \sum a_i X^i \to \sum (a_i, 0)(0, 1)^i$$

   è un omomorfismo di anelli;

   (b) Determinare Nucleo ed Immagine di φ ed applicare il Teorema di Omomorfismo per gli anelli;

   (c) Usando il punto precedente, mostrare che A è un campo, ampliamento semplice di $\mathbb{Z}_7$, e determinare esplicitamente un elemento α di A tale che $A = \mathbb{Z}_7(\alpha)$. Quanti elementi ha A?