Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 5

1. Sia A un dominio di integrità. Dimostrare che un elemento $p \in A$ è irriducibile se e soltanto se lo è ogni elemento associato ad esso.

2. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$ e stabilire quali tra essi sono massimali.

Determinare inoltre la struttura degli anelli quoziente $\dfrac{\mathbb{Z}_{60}}{\bar{5}\mathbb{Z}_{60}}$ e $\dfrac{\mathbb{Z}_{60}}{\overline{15}\mathbb{Z}_{60}}$. Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

3. Sia A un dominio euclideo rispetto alla valutazione $v : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Mostrare che

(a) $v(1) \leq v(a)$, per ogni $a \in A^*$.

(b) $a \in A^*$ è invertibile se e soltanto se $v(a) = v(1)$.

(c) Se a e b sono associati in A, allora $v(a) = v(b)$.

(d) Se $a, b \in A^*$ sono tali che a divide b e $v(a) = v(b)$, allora a e b sono associati.

(e) Se $a, b \in A^*$ e b non è invertibile, allora $v(a) < v(ab)$.

4. Effettuare la divisione euclidea di $13 + 18i$ per $5 + 3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

5. Usando l'algoritmo delle divisioni successive, determinare un massimo comune divisore di $5 + 3i$ e $13 + 18i$ in $\mathbb{Z}[i]$ ed una identità di Bezout per esso.

6. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I = (1+3i)$ e $J = (3-3i)$. Determinare gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

7. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di α è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(\alpha)$ è un campo.

8. Determinare esplicitamente tutti gli elementi di:

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{(1+i)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(3)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}.$$

9. Fattorizzare in elementi irriducibili i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$:

$$6\,,\ 10\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 3+4i\,,\ -3+8i\,,\ 11+3i\,.$$

10. Si considerino in $\mathbb{Q}[X]$ gli ideali $I=(f(X))$ e $J=(g(X))$, dove
$f(X)=2X^3+X^2+X-1$ e $g(X)=2X^3-7X^2+7X-2$.
Determinare gli ideali $I+J$ e $I\cap J$.

11. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne Nucleo ed Immagine:
$\varphi:\mathbb{Z}[X]\longrightarrow\mathbb{Z}\,;f(X)\to f(0);$
$\varphi:\mathbb{Z}[X]\longrightarrow\mathbb{Z}_n\,;f(X)\to\overline{f(0)};$
$\varphi:\mathbb{Z}[X]\longrightarrow\mathbb{Z}_n\,;\sum a_iX^i\to\sum\overline{a_i}X^i;$
$\varphi:\mathbb{Q}[X]\longrightarrow\mathbb{C}\,;f(X)\to f(i);$
$\varphi:\mathbb{Q}[X]\longrightarrow\mathbb{R}\,;f(X)\to f(\sqrt[3]{2}).$

12. Si consideri l'applicazione
$\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7$ definita da $a\to([a]_3,[a]_7)$
Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli, determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed applicare il Teorema di omomorfismo per gli anelli.

13. Sia $R:=A[X]/I$. Stabilire se R è un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :
(a) $A:=\mathbb{Q}$, $I:=(X^2-1)$; (b) $A:=\mathbb{Q}$, $I:=(X^3+X+1)$;
(c) $A:=\mathbb{Z}$, $I:=(2X^2+2)$; (d) $A:=\mathbb{Z}_3$, $I:=(X^3+X+\bar{1})$.
Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

14. Studiare l'anello quoziente $A=\dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+aX+\bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a\in\mathbb{Z}_5$ esso è un campo.
Determinare inoltre tutti gli ideali di A nel caso in cui $a=\bar{0}$ e $a=\bar{1}$.

15. Sia $f(X)=X^3+\bar{2}X^2+\bar{4}X+\bar{2}\in\mathbb{Z}_5[X]$. Mostrare che l'anello quoziente $A=\dfrac{\mathbb{Z}_5[X]}{(f(X))}$ è un campo con un numero finito di elementi e determinare esplicitamente tali elementi (in forma generica).