Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 4

1. Sia A un anello ed $a \in A$. a si dice *idempotente* se $a^2 = a$, a si dice *nilpotente* se esiste un intero $n \geq 2$ tale che $a^n = 0$.

   Mostrare che, se A è commutativo e unitario e $a \neq 0, 1$:

   (a) Se a è nilpotente, allora a è uno zero-divisore;

   (b) Se a è idempotente, allora a è uno zero-divisore;

   (c) Se a è nilpotente, allora a non è idempotente;

   (d) Se a è nilpotente, allora ab è nilpotente, per ogni $b \in A$;

   (e) Se $u \in A$ è invertibile e a è nilpotente, allora $u + ab$ è invertibile, per ogni $b \in A$.

2. Sia $n \geq 2$ e $n = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ la sua fattorizzazione in numeri primi.

   Mostrare che $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e soltanto se $p_1 \dots p_s$ divide a.

3. Verificare che l'insieme

$$F = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \, a, b \in \mathbb{Z}_3 \}$$

   è un campo, rispetto alle usuali operazioni di somma e moltiplicazione di matrici.

4. Determinare gli elementi invertibili, idempotenti e nilpotenti dell'anello $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ delle matrici quadrate ad elementi in $\mathbb{Z}_2$.

5. Verificare che i seguenti insiemi numerici sono anelli:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\} \, ; \, \mathbb{Q}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Q}\} \, ;$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \, ; \, a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

   Quali tra essi sono campi?

6. Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 280\mathbb{Z}$ e $J = 60\mathbb{Z}$. Determinare gli ideali $I + J$ e $I \cap J$.

7. Sia p un numero primo. Si determini l'ideale (p, X) di $\mathbb{Z}[X]$ generato da p e X. Si dimostri poi che questo ideale non è principale.

8. Si considerino le seguenti matrici di $GL_2(\mathbb{C})$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che valgono le relazioni:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}.$$

Sia

$$\mathcal{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \; ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Se $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ poniamo $\overline{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.

Mostrare che $\mathcal{H}$ è un sottoanello di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Inoltre, se $q \neq 0$, allora

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1} q\overline{q} = \mathbf{1}.$$

Dedurne che $\mathcal{H}$ è un anello unitario e integro ma NON commutativo in cui ogni elemento non nullo ha un inverso.

$\mathcal{H}$ si chiama l'*algebra dei quaternioni reali.*

9. In un dominio integro A, si consideri la relazione

$$x \, \rho \, y \Leftrightarrow x \text{ divide } y \text{ e } y \text{ divide } x.$$

Si dimostri che ρ è una relazione di equivalenza.

Inoltre $x \, \rho \, y$ se e soltanto se x e y sono *associati*, cioè $x = uy$, con u un elemento invertibile di A.

10. Sia $f(X)$ uno dei seguenti polinomi:

$$15X \, ; \quad 15X + 3 \, ; \quad 6X^2 - 5X + 1 \, ; \quad 6X^3 - 7X^2 - X + 2.$$

Determinare esplicitamente tutti i divisori di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ e ripartirli in classi di polinomi associati.

11. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$.
    (a) $5X$ divide $3X^2$;
    (b) $X-3$ divide X^3-3X^2+X-3 ;
    (c) $3(X-3)$ divide X^3-3X^2+X-3 .

12. Sia
$$f(X) := 7X^7+6X^6+5X^5+4X^4+3X^3+2X^2+X+1.$$
    Calcolare $f(2)$.

13. Utilizzando l'Algoritmo Euclideo della divisione, determinare il massimo comune divisore monico delle seguenti coppie di polinomi ed una identità di Bezout per esso:
$$f(X) := X^5+\overline{1}\,; \quad g(X) := \overline{3}X^3+\overline{1} \in \mathbb{Z}_5[X];$$
$$f(X) := X^5-\frac{1}{3}X^4-\frac{1}{2}X+\frac{1}{6}\,; \quad g(X) := X^3+\frac{2}{3}X^2+\frac{2}{3}X-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X].$$

14. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili rispettivamente in $\mathbb{Z}[X]\,,\mathbb{Q}[X]\,,\mathbb{R}[X]\,,\mathbb{C}[X]$:
$$21X+3\,; \quad X^2+X+3\,; \quad X^3-1\,; \quad 2X^4+5X^2+2.$$

15. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Z}_5[X]$:
$$\overline{3}X^2+\overline{2}X+\overline{2}\,; \quad X^3+\overline{3}X^2+\overline{3}X+\overline{2}\,; \quad X^4+\overline{2}X^3+\overline{2}X^2+\overline{2}X+\overline{1}.$$

16. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$:
$$X^4+1\,; \quad X^5-1\,; \quad X^6-1\,; \quad X^6-8.$$

17. Determinare le radici razionali del polinomio
$$f(X) = 2X^4-5X^3+4X^2-5X+2 \in \mathbb{Z}[X].$$