Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006
AL2 - Gruppi, Anelli e Campi (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 3

1. Sia $\mathbf{A}_4$ il gruppo alterno di grado 4 e sia $\mathbf{V}_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Mostrare che $\mathbf{V}_4$ è normale in $\mathbf{A}_4$ e costruire tutti i possibili omomorfismi $\mathbf{A}_4 \longrightarrow \mathbf{A}_4/\mathbf{V}_4$.

2. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi e, nei casi affermativi, applicare il Teorema di Omomorfismo:

   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\ ;\ \bar{a}_5 \to \bar{a}_{15}\ \ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\ ;\ \bar{a}_5 \to 3\bar{a}_{15}\ \ ;$

   $\varphi : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\ ;\ \bar{a}_5 \to 5\bar{a}_{15}\ \ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5\ ;\ \bar{a}_{15} \to \bar{a}_5\ \ ;$

   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_5\ ;\ \bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_5\ \ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\ ;\ \bar{a}_{15} \to 3\bar{a}_{15}\ \ ;$

   $\varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\ ;\ \bar{a}_{15} \to 5\bar{a}_{15}\ \ ;\quad \varphi : \mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}\ ;\bar{a}_{15} \to 2\bar{a}_{15}\ .$

3. Dimostrare che non esiste alcun omomorfismo non banale $\mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.

4. Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_{15} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$.

5. Determinare esplicitamente tutti gli omomorfismi $\mathbb{Z}_{21} \to \mathbb{Z}_{30}$.

6. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi di $\mathbb{Z}_{24}$.

7. Sia G un gruppo ciclico di ordine 4 e sia G' un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi $G \longrightarrow G'$ e $G' \longrightarrow G$.

8. Determinare tutti i possibili omomorfismi $\mathbf{H} \to \mathbf{D_4}$ e $D_4 \to \mathbf{H}$.

9. Sia $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definita da $z \to \frac{z}{|z|}$.

   Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il Teorema di Omomorfismo. Inoltre interpretare geometricamente tale teorema nel piano di Gauss.

10. Sia $\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definita da $r \to \cos(2r\pi) + i\sin(2r\pi)$.

    Verificare che φ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

11. Mostrare che, per ogni radice primitiva n-sima dell'unità ζ, l'applicazione $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ definita da $k \longrightarrow \zeta^k$ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo.

12. Sia D_6 il gruppo delle isometrie dell'esagono regolare. Mostrare che D_6 è isomorfo al sottogruppo di $\mathbf{S}_6$ generato da $\delta = (26)(35)$ e $\rho = (123456)$.

13. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *caratteristico* se $\alpha(H) = H$, per ogni $\alpha \in Aut(G)$.

    Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

14. Mostrare che la relazione di coniugio in un gruppo è una relazione di equivalenza.

    Determinare esplicitamente le classi di coniugio di $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{H}$, D_4.

15. Mostrare che in un gruppo due elementi coniugati hanno lo stesso ordine.

16. Sia $\varphi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Mostrare che, se $g \in G$ ha ordine finito n, allora l'ordine di $\varphi(g)$ divide n.

17. (<u>Facoltativo</u>) Sia $A \in GL_2(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale, cioè tale che $A^{-1} = A^t$.

    Mostrare che esiste $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che:

    $$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

    Mostrare che, fissato nel piano euclideo reale un riferimento cartesiano, l'applicazione che associa ad ogni isometria piana che fissa l'origine la matrice corrispondente è un isomorfismo tra il gruppo delle isometrie del piano che fissano l'origine ed il gruppo ortogonale di grado 2, $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R})\,; A^{-1} = A^t\}$. Inoltre, in questo isomorfismo, il gruppo ortogonale speciale di grado 2, $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R})\,; det(A) = 1\}$, corrisponde al sottogruppo delle rotazioni attorno all'origine.

    Mostrare che $SO_2(\mathbb{R})$ è un sottogruppo normale di $O_2(\mathbb{R})$ di indice 2.

Dedurne che:

$$O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R}).$$

Perciò le isometrie del piano che non sono rotazioni si ottengono tutte componendo una rotazione ρ con la riflessione τ rispetto all'asse delle ordinate e di conseguenza sono tutte riflessioni rispetto ad una retta passante per l'origine.

Infine mostrare che, per ogni riflessione σ ed ogni rotazione ρ, esiste una rotazione ρ' tale che $\sigma\rho = \rho'\sigma$.

Esercizi di esonero 2004-2005

1. Sia G l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi in $\mathbb{Z}_8$ della forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ con } ad = 1.$$

   (a) Mostrare che G è un gruppo commutativo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne;

   (b) Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \text{ definita da } A \to a$$

   è un omomorfismo di gruppi;

   (c) Determinare $Ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$ e definire l'isomorfismo canonico

$$G/Ker(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi);$$

   (d) Determinare $\varphi^{-1}(\bar{5})$.

2. Sia C_{12} il gruppo delle radici complesse dodicesime dell'unità.

   (a) Determinare il gruppo $Aut(C_{12})$ degli automorfismi di C_{12};

   (b) Stabilire se $Aut(C_{12})$ è un gruppo ciclico.

3. Determinare le possibili strutture cicliche e gli ordini degli elementi del gruppo alterno di grado sette $\mathbf{A_7}$.

4. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ si definisca l'operazione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

   Mostrare che rispetto a questa operazione $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ è un gruppo ciclico e determinate tutti i suoi generatori.

5. Sia G un gruppo moltiplicativo e N un sottogruppo normale di G di indice m. Mostrare che, per ogni $g \in G$, $g^m \in N$.

6. Determinare il gruppo $G = Aut(\mathbb{Z}_{31})$ degli automorfismi di $(\mathbb{Z}_{31}, +)$ e tutti i sottogruppi di G.

7. Sia H il gruppo delle unità dei quaternioni.

   Determinare almeno un omomorfismo non nullo $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ ed applicare il Teorema di Omomorfismo.

8. Si consideri il gruppo quoziente additivo $G = \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

   Mostrare che:

   (a) Ogni elemento di G ha ordine finito;

   (b) Per ogni $n \geq 0$ esiste un sottogruppo di G di ordine n.