Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2005/2006

AL2 - Gruppi, Anelli e Campi
Prof. S. Gabelli

Tutorato 1

1. Si consideri in $\mathbb{Z}$ l'operazione definita da

$$a \star b := a^2 + b.$$

- Stabilire se l'operazione $\star$ è associativa o/e commutativa;

- Stabilire se esiste in $\mathbb{Z}$ un elemento neutro a destra o/e a sinistra rispetto all'operazione $\star$;

2. Sia A un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Stabilire se $\mathcal{P}(A)$ è un semigruppo o un gruppo rispetto alle operazioni di intersezione, unione, differenza simmetrica.

Stabilire inoltre se queste operazioni sono commutative.

3. Siano S un semigruppo unitario e $a \in S$. Mostrare che a è è simmetrizzabile se e soltanto se le due applicazioni $\mu_a : S \longrightarrow S$, $x \to xa$ e ${}_a\mu : S \longrightarrow S$, $x \to ax$ sono biiettive.

4. Mostrare che i seguenti sottoinsiemi di $M(n, \mathbb{R})$ sono gruppi rispetto alla moltiplicazione righe per colonne:

- $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \, detA \neq 0\}$ (*gruppo lineare generale di grado* n);

- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \, detA = 1\}$ (*gruppo lineare speciale di grado* n);

- $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \, A^{-1} = A^t\}$ (*gruppo ortogonale di grado* n);

- $SO(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n, \mathbb{R})$ (*gruppo ortogonale speciale di grado* n).

Questi insiemi sono gruppi sono commutativi? Sono gruppi rispetto all'addizione?

5. Sia A un insieme finito e sia $F := A^A$ il semigruppo di tutte le applicazioni $f : A \longrightarrow A$ (rispetto alla composizione di funzioni).

   Determinare esplicitamente il gruppo $U(F)$ degli elementi simmetizzabili di F quando $|A| = 2, 3, 4$.

6. Sia V l'insieme dei vettori nello spazio ordinario. Se $w \in V$ sia $\tau_w : V \longrightarrow V$, $v \to v + w$, la *traslazione* definita da w.

   Mostrare che l'insieme delle traslazioni $T = \{\tau_w \, ; \, w \in V\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

7. Determinare il centro del semigruppo moltiplicativo dell'anello delle matrici $M(2, \mathbb{R})$.

8. Siano $(A, \star)$ e $(B, \circ)$ due (semi)gruppi. Mostrare che $A \times B$ è un (semi)gruppo rispetto all'operazione definita da:

$$(a, b)(a', b') := (a \star a', b \circ b').$$

   Mostrare inoltre che $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$ (dove con $Z(S)$ si indica il centro del semigruppo S).

   Concludere che $A \times B$ è un semigruppo commutativo se e soltanto se A e B sono entrambi semigruppi commutativi.

9. Dimostrare che in un gruppo G valgono le leggi di cancellazione (destra e sinistra), cioè

$$ab = ac \Rightarrow b = c \, ; \quad ba = ca \Rightarrow b = c,$$

   scelti comunque $a, b, c \in G$.

10. Mostrare che l'insieme $M(n, \mathbb{Z})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$ è un anello rispetto alla somma e alla moltiplicazione righe per colonne. Determinare inoltre gli elementi invertibili di $M(n, \mathbb{Z})$.

11. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_n$ delle classi resto modulo n è un campo se e soltanto se $n = p$ è un numero primo.

12. Determinare esplicitamente il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$ per $2 \leq n \leq 15$.