Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
AL310 – Istituzioni di Algebra superiore
Appello C

Esercizio 1. (REGALO ☺) Si consideri il polinomio $f(T) := T^4 - 10T^2 + 20 \in \mathbf{Q}[T]$ e sia $K \subseteq \mathbf{C}$ il campo di spezzamento di $f(T)$ su $\mathbf{Q}$.

(i) Si calcoli $[K : \mathbf{Q}]$ e un elemento primitivo di K su $\mathbf{Q}$.

(ii) Dopo aver determinato il gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, si illustri la corrispondenza di Galois, indicando, per ciascun campo intermedio fra $\mathbf{Q}$ e K, un elemento primitivo su $\mathbf{Q}$.

(iii) Si calcoli il gruppo di Galois dei seguenti polinomi

$$f(T)(T^2 - 5) \qquad f(T)(T^2 + 5) \qquad f(T)(T^3 - T - 2)$$

Esercizio 2. Sia λ una soluzione reale dell'equazione $T^3 + T + 1 = 0$.

(i) Si dica se $\mathbf{Q}(\lambda)$ è un ampliamento di Galois di $\mathbf{Q}$.

(ii) Si determinino, se esistono, numeri razionali a, b, c tali che $\lambda^{-1} = a + b\lambda + c\lambda^2$.

(iii) Si determini il polinomio minimo di $\lambda^2 + 1$ su $\mathbf{Q}$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f(T) := T^6 + T^2 + 1 \in \mathbf{F}_2[T]$ e sia K un suo campo di spezzamento (su $\mathbf{F}_2$).

(i) Si descriva il gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{F}_2)$.

(ii) Si dica se è vero che ogni elemento α tale che $K = \mathbf{F}_2(\alpha)$ è un generatore del gruppo moltiplicativo $K^\star$.

(iii) Se β è radice di un polinomio irriducibile su $\mathbf{F}_2$ di quinto grado, si calcoli quanti sono i campi intermedi fra $\mathbf{F}_2$ e $K(\beta)$.

Esercizio 4. Sia p un numero primo. Si dimostri che il gruppo di Galois del polinomio

$$T^5 - 5pT + p \in \mathbf{Q}[T]$$

è $\mathbf{S}_5$.

Esercizio 5. Siano K un campo, U un'indeterminata su K e $\sigma : K(U) \longrightarrow K(U)$ l'applicazione definita ponendo $\sigma(f(U)) := f(U + 1)$, per ogni $f(U) \in K(U)$.

(i) Si verifichi che σ è un automorfismo del campo $K(U)$.

(ii) Si determini l'ordine di σ nei casi $K := \mathbf{Q}$, $K := \mathbf{F}_{p^n}$ (p primo, n intero positivo).

(iii) Si determini una funzione razionale $\phi(U) \in \mathbf{F}_2(U)$ tale che $\mathbf{F}_2(\phi(U))$ sia il campo fisso $\mathbf{F}_2(U)^\sigma$ di σ.

Esercizio 6. Il candidato risponda in modo chiaro e conciso alle seguenti domande, giustificando la risposta.

(a) Esiste un polinomio non costante $f(T) \in \mathbf{F}_{11}[T]$ privo di radici?

(b) Sia $K \subseteq \mathbf{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $T^{71} - 1$. È vero che ogni sottocampo di K è campo di spezzamento di qualche polinomio irriducibile su $\mathbf{Q}$?

(c) Quali sono le $\mathbf{Q}-$immersioni in $\mathbf{C}$ del campo $\mathbf{Q}(\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}})$? Sono tutte $\mathbf{Q}-$automorfismi?