Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 9 (16 Maggio 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Siano F un campo di caratteristica 5, $a \in F$,

$$f := X^5 - X + a \in F[X].$$

(a) Dimostrare che f è separabile su F.

(b) Se K è un campo di spezzamento di f su F e $\alpha \in K$ è una radice di f, dimostrare che $K = F(\alpha)$.

(c) Dedurre che il gruppo di Galois di K su F ha 5 elementi se e soltanto se f è irriducibile in $F[X]$.

Esercizio 2. Determinare due campi con 9 elementi, e stabilire esplicitamente un isomorfismo fra essi.

Esercizio 3. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ è normale su $\mathbb{Q}$, e sia χ la restrizione a K del coniugio complesso.

(a) Dire perché χ è un automorfismo di K.

(b) Dimostrare che $K^{<\chi>} = \mathbb{Q}(\alpha\overline{\alpha}, \alpha + \overline{\alpha})$.

Esercizio 4. Siano n un numero naturale non nullo e p un numero primo, K un campo con p^n elementi. Usare la corrispondenza di Galois per determinare il grado su $\mathbb{F}_p$ di ogni sottocampo di K.

Esercizio 5. Stabilire, motivando in modo esauriente la risposta, se il polinomio $f := X^{12} + X^6 + 1$ è separabile su $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$.

Esercizio 6. Siano $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva quinta dell'unità, $\alpha := \zeta^2 + \zeta^3$.

(a) Dimostrare che l'ampliamento $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ è di Galois.

(b) Determinare tutti gli elementi $\phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ tali che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\zeta)^{<\phi>}$.

(c) Determinare una risolvente di Galois di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7. Illustrare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$.

Esercizio 8. Consideriamo i polinomi di $\mathbb{Q}[X]$

$$f_1 := X^6 + 5 \qquad f_2 := X^8 - 3,$$

e sia K_i $(i = 1, 2)$ un campo di spezzamento di f_i su $\mathbb{Q}$. Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})$ $(i = 1, 2)$.

Esercizio 9. Sia K un campo di spezzamento del polinomio $(X^2-2)(X^2+3)$ su $\mathbb{Q}$. Determinare tutti i sottocampi di K.

Esercizio 10. Poniamo $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

(a) Verificare che $\mathbb{Q}(i) \subseteq K$.

(b) Determinare tutte le $\mathbb{Q}(i)-$immersioni di K.

Esercizio 11. Consideriamo il polinomio $f := (X^3 - 2)(X^3 - 3)$.

(a) Determinare un campo di spezzamento K di f su $\mathbb{Q}$, e calcolare $[K : \mathbb{Q}]$

(b) Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, stabilendo un isomorfismo di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ con un prodotto diretto di gruppi noti.

Esercizio 12. Determinare due ampliamenti F, K di $\mathbb{Q}$ tali che $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Esercizio 13. Sia K un campo di spezzamento del polinomio $X^2 + 1 + \sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(a) Stabilire se l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$ è radicale.

(b) Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})), \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(c) Stabilire se l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$ è risolubile.

Esercizio 14. Siano F un campo e σ un automorfismo di F tale che $\sigma^4 = \mathrm{Id}_F$ e

$$\sigma(\alpha) + \sigma^3(\alpha) - \alpha - \sigma^2(\alpha) = 0,$$

per ogni $\alpha \in F$. Dimostrare che $\sigma^2 = \mathrm{Id}_F$.

Esercizio 15. Siano K/F un ampliamento di campi, $\alpha, \beta \in K$ algebrici su F, $f_\alpha, f_\beta \in F[X]$ i polinomi minimi di α, β, rispettivamente, su F. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

(i) f_α è irriducibile in $F(\beta)[X]$.

(ii) f_β è irriducibile in $F(\alpha)[X]$.