Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 7 (2 Maggio 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1 (Riscaldamento). Si consideri il campo $K := \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, e sia $\alpha := \dfrac{\sqrt{2}}{i+\sqrt{2}}$.

(a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(b) Dopo aver dimostrato che $\mathcal{B} := \{1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2}\}$ è una base di K su $\mathbb{Q}$, determinare le componenti di α rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(c) Dimostrare che esiste un $\mathbb{Q}-$automorfismo non banale φ di K tale che $\varphi(\alpha) = \alpha$, e verificare che $K^{\varphi} = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 2. Sia K il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ di uno dei polinomi

$$f := X^4 + 30X^2 + 45\,; \quad g := X^4 + 2X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$$

su $\mathbb{Q}$.

(a) Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, e definire esplicitamente un isomorfismo tra $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ e un gruppo noto.

(b) Determinare tutti i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ e K, facendo uso del Teorema di Corrispondenza di Galois.

Esercizio 3. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i\sqrt{3})$.

(a) Mostrare che l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$ è di Galois e determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(b) Facendo uso del Teorema di Corrispondenza di Galois, determinare tutti i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ e K e stabilire quali sono normali su $\mathbb{Q}$.

(c) Per ogni campo intermedio, determinare un elemento primitivo ed il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Mostrare che $\cos(2\pi/7)$ è un numero algebrico e determinare il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 5. Costruire un polinomio su $\mathbb{Q}$ irriducibile di grado 5 con tutte radici reali.

Esercizio 6. Esplicitare la corrispondenza di Galois per il tredicesimo ampliamento ciclotomico.

Esercizio 7. Dire se esiste un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ il cui campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ contenga $\sqrt[3]{2}, \sqrt{5}$ e sia un $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale di dimensione 6.

Esercizio 8. Siano K un campo, S un sottoinsieme si $\mathrm{Aut}(K)$,

$$K^S := \{x \in K : \sigma(x) = x \text{ per ogni } \sigma \in S\}.$$

(a) Dimostrare che K^S è un campo.

(b) Sia F un sottocampo di K e S un sottoinsieme di $\mathrm{Gal}(K/F)$. Dimostrare che F è un sottocampo di K^S.

(c) Sia H il sottogruppo generato da S. Dimostrare che $K^S = K^H$.

Esercizio 9. Siano F un campo, $\overline{F}$ una sua fissata chiusura algebrica.

(a) Dimostrare che l'ampliamento $\overline{F}/F$ è normale.

(b) Usare (a) per dedurre che esistono ampliamenti normali separabili e infiniti.

Esercizio 10. Siano F un campo di caratteristica positiva p, K una sua estensione algebrica, $a \in K$. Allora a è inseparabile su F se e soltanto se esistono $c_1, \ldots, c_{r-1} \in F$ tali che il $c_0 + \ldots + c_{r-1}X^{p(r-1)} + X^{pr}$ è il polinomio minimo di a su F.

Esercizio 11. Sia F un campo. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

(i) F è algebricamente chiuso.

(ii) Per ogni ampliamento algebrico K di F, si ha $K = F$.

Esercizio 12. Siano G un gruppo, H, K sottogruppi di G, 1 l'elemento neutro di G, e sia

$$HK := \{hk : h \in H, k \in K\}.$$

(a) Dimostrare che HK è un sottogruppo di G se e soltanto se $HK = KH$.

(b1) Dedurre che, se H è normale in G, allora HK è un sottogruppo di G.

(b2) Mostrare che, se H è normale in G, allora HK è il sottogruppo generato da $H \cup K$.

(c) Dimostrare che, se H, K sono normali in G, allora HKè normale in G.

(d) Dimostrare che, se H, K sono normali in G e $H \cap K = \{1\}$, allora HK è un sottogruppo del centro di G.

(e) Dimostrare che G è isomorfo a $H \times K$ se e soltanto se vengono soddisfatte le seguenti condizioni.

  (e1) $G = HK$.

  (e2) H, K sono normali in G.

  (e3) $H \cap K = \{1\}$.

Esercizio 13. Sia $f(X) := X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Mostrare che il campo di spezzamento di $f(X)$ in $\mathbb{C}$ è $\mathbb{Q}(\alpha, \xi)$, dove $\alpha := \sqrt[5]{2}$ e ξ è una radice primitiva quinta dell'unità.

(b) Mostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è il prodotto semidiretto, ma non diretto, di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ e $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\xi))$.

(c) Identificare $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ con un sottogruppo di S_5.

Esercizio 14. Si considerino i sottogruppi di S_4

$$H :=< (12) > \qquad K :=< (34) > \qquad L :=< (14) > .$$

(a) Stabilire quale/i dei sottogruppi H, K, L è/sono normale/i in S_4.

(b) Verificare che HK è un sottogruppo di S_4, e determinarne la struttura.

(c) Verificare che HL non è un sottogruppo di S_4, e determinare la struttura di $< H \cup L >$.

(d) Se $N :=< H \cup K \cup L >$, verificare che N contiene tutti i $3-$cicli di S_4.

(e) Dedurre che $N = S_4$.

Esercizio 15. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irriducibile di grado n. Mostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ è contenuto nel gruppo alterno A_n se e soltanto se il discriminante di $f(X)$ è un quadrato in $\mathbb{Q}$.

Dedurne che, se $f(X) := X^4 + bX^2 + c$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$, il suo gruppo di Galois è V_4 se e soltanto se c è un quadrato in $\mathbb{Q}$.