Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 6 (18 Aprile 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Si consideri il campo $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

(a) Determinare il grado di K su $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare un polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ il cui campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ sia K.

(c) Dedurre che l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$ è di Galois, e determinare tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(d) Dire perché l'ampliamento $K/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ è di Galois, e determinare una risolvente di Galois di K su $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Esercizio 2. Poniamo $K := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

(a) Stabilire se K è normale su $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare una chiusura normale N di K su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di K in $\mathbb{C}$.

(d) Per ogni $\mathbb{Q}-$immersione φ di K in $\mathbb{C}$, determinare tutte $\mathbb{Q}-$immersioni di N che estendono φ, e dedurre che tali estensioni sono $\mathbb{Q}-$automorfismi di N.

(e) Determinare tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$.

Esercizio 3. Sia K un campo con 16 elementi.

(a) Determinare un polinomio $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ irriducibile il cui campo di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ sia K.

(b) Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_2)$.

(c) Determinare una risolvente di Galois di K su $\mathbb{F}_2$.

Esercizio 4. Sia K/F un ampliamento di campi finito e separabile, e si considerino elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tali che $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dimostrare che l'insieme

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in F^n : F(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) \subsetneq K\}$$

è finito.

Esercizio 5. Sia K/F un ampliamento di campi. Dimostrare o confutare, motivando le risposte, le seguenti asserzioni.

(a) Se $f(X), g(X) \in F[X]$ hanno campi di spezzamento su F distinti, allora hanno necessariamente campi di spezzamento su K distinti.

(b) Se K è algebrico su F e A è un anello tale che $F \subseteq A \subseteq K$, allora A è un campo.

(c) Esistono campi finiti algebricamente chiusi.