Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 5 (26 Marzo 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice dodicesima primitiva dell'unità.

(a) Determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ e il reticolo dei suoi sottogruppi.

(b) Dimostrare che i campi $F_1 := \mathbb{Q}(i), F_2 := \mathbb{Q}(i\sqrt{3}), F_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono contenuti in $\mathbb{Q}(\zeta)$.

(c) Per ogni $i \in \{1,2,3\}$, determinare l'insieme

$$H_i := \{\sigma \in \mathrm{Gal}((\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) : \sigma_{|F_i} = \mathrm{Id}_{F_i}\},$$

e mostrare che è un sottogruppo di $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

(d) Usando i punti precedenti, scrivere una determinazione di ζ.

Esercizio 2. Si considerino i polinomi

$$f := X^2 + X + 6, \quad g := X^2 + X + 3 \in \mathbb{F}_7[X].$$

(a) Dopo aver aver verificato che gli anelli $K_f := \mathbb{F}_7[X]/(f), K_g := \mathbb{F}_7[X]/(g)$ sono campi, dire perché essi sono isomorfi e determinare tutti gli isomorfismi di K_f su K_g.

(b) Poniamo $K := K_f$. Se $h \in K[X]$ è un polinomio irriducibile di grado due e L è un campo di spezzamento di h su K, determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_7)$.

Esercizio 3. Poniamo $F := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), L := \mathbb{Q}(\sqrt{3}), K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

(a) Dire, motivando in modo esauriente la risposta, quali delle estensioni di campi $K/F, K/L, K/\mathbb{Q}$ sono normali.

(b) Determinare un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare i gruppi $\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Gal}(K/L)$.

(d) Determinare un'estensione M di K tale che $M/\mathbb{Q}$ sia di Galois, e descrivere la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$.

Esercizio 4. Siano p un numero primo, U un'indeterminata su $\mathbb{Q}$, $L := \mathbb{Q}(U^2)$, $K := \mathbb{Q}(U, \sqrt{p} + p)$.

(a) Calcolare, dichiarando esplicitamente tutti i risultati usati, il grado di K su L.

(b) Dire perché l'estensione di campi K/L è separabile e determinare un elemento primitivo α di K su L.

(c) Determinare il polinomio minimo di α su L.

(d) Determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(K/L)$.

Esercizio 5. Sia K/L un'estensione di campi finita. Dimostrare che ogni $L-$immersione $\phi : K \longrightarrow K$ è un $L-$automorfismo. [Sugg: mostrare preliminarmente che $\phi(K)$ è un'estensione di L...]