Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 4 (14 Marzo 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Siano p un numero primo e $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice quinta primitiva dell'unità.

(a) Determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{p}, \zeta)$ in $\mathbb{C}$. Quali di queste sono $\mathbb{Q}-$automorfismi?

(b) Determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{p})$ in $\mathbb{C}$. Quali di queste sono $\mathbb{Q}-$automorfismi?

(c) Stabilire se ciascuno dei campi $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{p}, \zeta)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ è campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ di qualche polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Esercizio 2. Siano p, q numeri primi distinti.

(a) Determinare un campo di spezzamento K del polinomio

$$X^4 - (p+q)X^2 + pq \in \mathbb{Q}[X]$$

su $\mathbb{Q}$.

(b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$, e determinare due basi distinte di K come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale.

(c) Determinare tutte le $\mathbb{Q}-$immersioni di K in $\mathbb{C}$, e mostrare che ognuna di esse è un $\mathbb{Q}-$automorfismo di K.

(d) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una $\mathbb{Q}-$immersione φ di K in $\mathbb{C}$ tale che $\varphi(\sqrt{p} + \sqrt{q}) = \sqrt{p}$.

Esercizio 3. Poniamo $\alpha := i + \sqrt[3]{7}$, $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Determinare il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(b) Dopo aver mostrato che $\mathbb{Q}(i) \subset K$, determinare tutte le $\mathbb{Q}(i)-$immersioni di K in $\mathbb{C}$.

(c) Sia $\phi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ un omomorfismo di campi non nullo. Determinare i possibili valori di $\phi(\alpha + \sqrt[3]{49})$.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $f := X^3 + 2X^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$.

(a) Determinare un campo di spezzamento K di f su $\mathbb{F}_3$, e determinare un elemento $\alpha \in K$ tale che $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$.

(b) Scrivere tutti gli elementi di K.

(c) Determinare tutti i generatori del gruppo moltiplicativo K^*.

(d) Per ogni $\beta \in K \backslash \mathbb{F}_3$, determinare il polinomio minimo di β su $\mathbb{F}_3$.

Sia L un'estensione di K e sia $\gamma \in L$ un elemento algebrico di grado 5 su K.

(e) Dire perché γ è algebrico su $\mathbb{F}_3$ e determinare il grado del polinomio minimo di γ su $\mathbb{F}_3$.

(f) Determinare la cardinalità del campo $K(\gamma)$.

Esercizio 5. Siano p un numero primo e U un'indeterminata su $\mathbb{F}_p$.

(a) Posto $T := U^p, K := \mathbb{F}_p(T)$, verificare che $K(U) = \mathbb{F}_p(U)$.

(b) Dire perché ogni elemento di $\mathbb{F}_p(U)$ è algebrico su K.

(c) Dimostrare che il polinomio $f := X^p - T \in K[X]$ è irriducibile. [Sugg.: ricordare che l'anello $\mathbb{F}_p[T]$ è un dominio a fattorizzazione unica...]

(d) Dimostrare che f ha un'unica radice in ogni suo campo di spezzamento.

(e) Determinare un campo di spezzamento L di f su K, e calcolare $[L : K]$.

Esercizio 6. Siano L/K un'estensione di campi, $\alpha \in L$.

(a) Dimostrare che, se α ha grado dispari su K, allora $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

(b) Mostrare con degli esempi che, se α ha grado pari su K, allora la precedente asserzione può essere in alcuni casi vera e in altri falsa.