Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 3 (7 Marzo 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Siano K un campo, $f \in K[X]$ un polinomio irriducibile, L un campo di spezzamento di f su K.

(a) Dimostrare che, se $\alpha, \beta \in L$ sono radici di f, allora $K(\alpha), K(\beta)$ sono isomorfi come campi e come $K-$spazi vettoriali.

(b) Stabilire, motivando la risposta, se l'asserzione (a) è vera se non si stabilisce alcuna condizione su f.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{C}$ una radice terza primitiva dell'unità.

(c) Dimostrare che $\varepsilon\sqrt[3]{3}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ e determinarne il polinomio minimo f su $\mathbb{Q}$.

(d) Dedurre che $\mathbb{Q}(\varepsilon\sqrt[3]{3})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ sono isomorfi come $\mathbb{Q}-$spazi vettoriali e come campi, e descrivere esplicitamente un isomorfismo fra essi.

(e) Determinare un campo di spezzamento K di $(X^2+1)f$ su $\mathbb{Q}$, e calcolare $[K : \mathbb{Q}]$.

(f) Stabilire, motivando in modo esauriente la risposta, se esiste un polinomio $g \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $g(\sqrt[3]{3}) = 0$, e avente $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ come campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio $f := X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

(a) Determinare un campo L contenente una radice α di f tale che $\alpha \notin \mathbb{F}_2$, e un'immersione $\iota : \mathbb{F}_2 \hookrightarrow L$.

(b) Dimostrare che f si decompone in fattori lineari in $L[X]$.

(c) Dedurre che $\mathbb{F}_2(\alpha)$ è un campo di spezzamento di f su $\mathbb{F}_2$.

(d) Determinare tutti gli elementi di $\mathbb{F}_2(\alpha)$ e tutti gli automorfismi del gruppo moltiplicativo $G := \mathbb{F}_2(\alpha)^*$.

(e) Determinare almeno un elemento $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ che non si estende a un automorfismo del campo $\mathbb{F}_2(\alpha)$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f := X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, e sia α una sua radice.

(a) Dire perché α^2 è algebrico su $\mathbb{Q}$, e determinare il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

(b) Dedurre che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$.

(c) Determinare il grado di $\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 4. Siano K un campo e U un'indeterminata su K.

(a) Dimostrare che un elemento $\alpha \in K(U)$ è algebrico su K se e soltanto se $\alpha \in K$.

(b) Usando (a), dimostrare accuratamente che $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi) : \mathbb{Q}(\pi)] = 2$.

Esercizio 5. Siano p, q numeri primi distinti.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ sono $\mathbb{Q}-$spazi vettoriali isomorfi.

(b) Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ sono campi isomorfi.