Università degli Studi Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 2 (29 Febbraio 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Siano α una radice del polinomio

$$f := X^4 + 5X^3 + 4X + 31 \in \mathbb{Q}[X],$$

e $\phi_\alpha : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito ponendo $\phi_\alpha(g) := g(\alpha)$, per ogni $g \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Determinare, motivando in modo esauriente la risposta, un generatore di $\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$, e dimostrare che $K := \mathbb{Q}[X]/\mathrm{Ker}(\phi_\alpha)$ è un campo.

(b) Definire un'immersione $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow K$.

(c) Per (b), possiamo pensare $\mathbb{Q}$ come sottocampo di K. Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 2. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(b) Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$. Vale l'uguaglianza? Perché?

(c) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(d) Posto $\beta := \sqrt{3} + \sqrt[4]{27} - 2$, dire perché $\beta \in K$, determinare l'inverso razionalizzato di β in K e il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(e) Sia $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irriducibile di grado 3. Stabilire se f può avere una radice in K.

Esercizio 3. Sia $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

(a) Dimostrare che non esistono elementi $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $(a + b\sqrt{2})^2 = 5$.

(b) Usando (a), calcolare il grado di $\sqrt{5}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(c) Usando (b), calcolare $[K : \mathbb{Q}]$. Determinare una base di K su $\mathbb{Q}$.

(d) Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

(e) Sia α una radice del polinomio $X^6 - \sqrt{5}X^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{5})X + 30 \in \mathbb{R}[X]$. Dimostrare che $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq 24$.

Esercizio 4. Sia p un numero primo. Poniamo

$$K := \left\{ \frac{f(\sqrt[3]{p})}{g(\sqrt[3]{p})} : f, g \in \mathbb{Q}[X], g(\sqrt[3]{p}) \neq 0 \right\}.$$

(a) Dimostrare che K è un campo tale che $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e dire perché ogni elemento di K è algebrico su $\mathbb{Q}$.

(c) Sia $\alpha \in K$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = K$ se e soltanto se $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 5. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva ottava dell'unità.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

(b) Deteminare il grado di $\zeta + \zeta^{-1}$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6.(*) Sia F un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f := X^5 - 2$.

(a) Siano L/K un'estensione di campi, $\alpha, \beta \in L$, n, m numeri naturali primi fra loro. Dimostrare che, se α, β hanno grado su K n, m rispettivamente, allora $[K(\alpha, \beta) : K] = nm$ e $K(\alpha) \cap K(\beta) = K$.

(b) Facendo uso di (a), calcolare $[F : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 7. Ricordiamo che una radice quinta primitiva dell'unità è

$$\varepsilon := \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i.$$

(a) Posto $\alpha := \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\ i$, dimostrare che $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dire perché il grado di $\alpha + \epsilon$ su $\mathbb{Q}$ non può essere 3.

(b) Calcolare il polinomio minimo f di α su $\mathbb{Q}$.

(c) Verificare che $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ è il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$.