Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2007/2008

TE1 - Esercizi 1 (22 Febbraio 2008)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'omomorfismo di anelli definito ponendo $\phi(f) = f(\sqrt[3]{3})$, per ogni $f \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Determinare, motivando in modo esauriente la risposta, un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $(f) = \mathrm{Ker}(\phi)$, e stabilire se $\mathrm{Ker}(\phi)$ è un ideale primo e/o massimale di $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Determinare l'anello $A := \phi(\mathbb{Q}[X])$, e dedurre da (a) che A è un campo.

Esercizio 2. Si consideri, per ogni $a \in \mathbb{F}_5(:= \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, il polinomio

$$f_a := X^2 + aX + a + 1 \in \mathbb{F}_5[X].$$

Posto $A_a := \mathbb{F}_5[X]/(f_a)$, sia τ_a la classe di X in A_a.

(a) Verificare che, per ogni $a \in \mathbb{F}_5$, il polinomio f_a non è divisibile per $X+1$ in $\mathbb{F}_5[X]$.

(b) Determinare l'insieme E degli elementi $a \in \mathbb{F}_5$ tali che $\tau_a - 1$ è invertibile in A_a, e verificare che $0 \in E$. Determinare esplicitamente l'inverso di $\tau_0 - 1$ in A_0.

(c) Determinare esplicitamente un elemento $\sigma \in A_0$ non nullo e non invertibile.

(d) Determinare i valori di a per i quali l'anello A_a è un campo.

(e1) Poniamo $K := A_1$. Determinare un omomorfismo iniettivo $\iota : \mathbb{F}_5 \hookrightarrow K$.

(e2) Identificando $\mathbb{F}_5$ con la sua immagine $\iota(\mathbb{F}_5)$ in K, possiamo pensare f_1 come un elemento di $K[X]$. Dimostrare che f si decompone in fattori lineari in $K[X]$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio

$$f := X^4 + 11X^3 + 15X^2 - 22X - 5 \in \mathbb{Q}[X].$$

(a) Decomporre f in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Detta α una radice non intera di f, determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 4. Sia $\alpha := \sqrt{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Verificare direttamente che $\mathscr{B} := \{1, \alpha\}$ è una base di K come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale.

(b) Posto $\beta := \alpha - 1, \gamma := \alpha^3 - 2$, dire perché $\beta^{-1}, \gamma^{-1} \in K$, e determinare le componenti di β^{-1}, γ^{-1} rispetto alla base $\mathscr{B}$.

Esercizio 5. Sia $\alpha := \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$.

(b) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6. (*) Sia L/K un'estensione di campi.

(a) Se esiste un elemento di L trascendente su K, dimostrare che L non è un $K-$spazio vettoriale finitamente generato. [Sugg: sia $x \in L$ un elemento trascendente su K. Considerare l'insieme $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$, e stabilire se è infinito...]

(b) Dedurre da (a) che l'estensione di campi $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ non è finita. Fornire, inoltre, una dimostrazione alternativa indipendente da (a). [Sugg: ricordare che $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ non sono equipotenti...]

(c) Supponiamo che $[L : K] = 27$. Esiste un campo F intermedio fra K e L tale che $[L : F] = 12$? Perché?