Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
TE1-Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Appello A
11 Giugno 2008

*Cognome*___________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Gli esercizi di recupero della prima prova in itinere sono contrassegnati con ^{r}.

Esercizio 1. Poniamo $K := \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{14}, \sqrt{21})$.

(a)^r Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$.

(b)^r Dimostrare che K è il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ del polinomio $X^4 - 40X^2 + 64$.

(c)^r Dire perché l'ampliamento di campi $K/\mathbb{Q}$ è di Galois, e descrivere la struttura di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$.

(d) Illustrare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$.

(e) Sia L un ampliamento di K tale che $L/\mathbb{Q}$ sia di Galois. Stabilire, motivando la risposta, se $\mathrm{Gal}_K(L)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L)$.

Esercizio 2. Consideriamo il polinomio $f(X) := X^3 + X - 1 \in \mathbb{F}_2$. Sia K un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_2$ e sia $\alpha \in K$ una radice di $f(X)$.

(a)^r Verificare che $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$.

(b)^r Se L è un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ del polinomio

$$g(X) := X^4 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X],$$

dire perché i campi K ed L sono isomorfi, e determinare esplicitamente un isomorfismo $\varphi : K \longrightarrow L$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio

$$f(X) := X^5 - 5X^4 + 10 \in \mathbb{Q}[X].$$

(a) Descrivere la struttura del gruppo di Galois di f su $\mathbb{Q}$, motivando in modo esauriente la risposta.

(b) Stabilire se $f(X)$ è risolubile per radicali.

(c) Detto L un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$, stabilire se esiste un campo intermedio K fra $\mathbb{Q}$ e L tale che $[K : \mathbb{Q}] = 15$.