Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2007/2008
TE1-Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prima prova di valutazione intermedia
10 Aprile 2008

*Cognome*____________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Esercizio 1. Si considerino i polinomi

$$f := X^4 - 4, \;\; g := X^5 + X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X].$$

(a) Stabilire se f, g hanno lo stesso campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare un campo di spezzamento F di f su $\mathbb{R}$.

(c) Detto K un campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$, determinare la struttura di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ e $\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}(F)$.

(d) Determinare un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$ e tutti i suoi coniugati (su $\mathbb{Q}$).

Esercizio 2. Siano U un'indeterminata su $\mathbb{C}$ e $T := U^4$.

(a) Determinare, motivando in modo esauriente la risposta, il grado di $\mathbb{C}(U)$ su $\mathbb{R}(T)$.

(b) Dire perché l'estensione di campi $\mathbb{R}(T) \subset \mathbb{C}(U)$ è separabile e determinare un elemento primitivo di $\mathbb{C}(U)$ su $\mathbb{R}(T)$.

(c) Dimostrare che l'estensione di campi $\mathbb{R}(T) \subset \mathbb{C}(U)$ è di Galois e determinare la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}_{\mathbb{R}(T)}(\mathbb{C}(U))$.

(d) Stabilire se l'estensione di campi $\mathbb{R}(T) \subset \mathbb{R}(U)$ è normale.

(e) Determinare le $\mathbb{R}(T)-$immersioni di $\mathbb{R}(U)$ in una sua chiusura algebrica, stabilendo quali di esse sono $\mathbb{R}(T)-$automorfismi.

(f) Dire perché $\mathbb{C}(U)$ non può essere un campo di spezzamento di alcun polinomio f a coefficienti in $\mathbb{Q}(T)$.

(g) Determinare le radici del polinomio minimo su $\mathbb{R}(T)$ di $U^2 + i + 1$.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f := X^4 + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ e sia L un suo campo di spezzamento su $\mathbb{F}_5$.

(a) Detta $\alpha \in L$ una radice di f, dimostrare che $\mathbb{F}_5(\alpha) = L$.

(b) Stabilire se α è un generatore del gruppo moltiplicativo L^*.

Siano $g := X^2 + X - 3 \in \mathbb{F}_5[X]$, e K un campo di spezzamento di g su $\mathbb{F}_5$.

(c1) Enunciare il risultato da cui segue che K e L sono campi isomorfi.

(c2) Determinare tutti gli isomorfismi fra i campi K e L.