Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2006/2007

AL4 - Numeri Algebrici (Prof. S. Gabelli)

Esercizi 6

Nel seguito A è un dominio integro con campo dei quozienti K.

Un *ideale frazionario* di A è un sotto A-modulo I di K tale che $(A : I) := \{x \in A\,; xI \subseteq A\} \neq (0)$.

1. Mostrare che:

   (a) I è un ideale frazionario se e soltanto se $I = \dfrac{1}{d}J$, dove $J \subseteq A$ è un ideale e $d \in A \setminus \{0\}$;

   (b) Se I è un sotto A-modulo di K finitamente generato, allora I è un ideale frazionario;

   (c) Ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario è un ideale frazionario.

2. Siano I, J ideali frazionari di A. Mostrare che: IJ, $I \cap J$, $I + J$ e $(I :_K J) = \{x \in K\,;\, xJ \subseteq I\}$ sono ideali frazionari.

   Inoltre valgono tutte le proprietà associative, coomutative e distributive di queste operazioni che valgono per gli ideali di A.

3. Mostrare che, se I è un ideale frazionario di A, allora $(I :_K I)$ è un sottoanello di K contenente A.

   Mostrare inoltre con un esempio che $(A :_K I)$ non è necesariamente un anello.

4. Mostrare che l'insieme $\mathcal{F}(A)$ degli ideali frazionari non nulli di A è un semigruppo rispetto alla moltiplicazione, con unità uguale ad A.

5. Un ideale frazionario non nullo I di A si dice *invertibile* se è invertibile nel semigruppo $\mathcal{F}(A)$, cioè se esiste un (unico) ideale frazionario J tale che $IJ = A$.

   Mostrare che se I è invertibile, allora il suo inverso è $I^{-1} = (A :_K I)$.

6. Mostrare che un ideale frazionario invertibile è finitamente generato.

   (Suggerimento: Se I è invertibile, $1 \in II^{-1}$.)

7. Sia I un ideale frazionario. Mostrare che l'applicazione

$$\varphi : (A :_K I) \longrightarrow Hom_A(I, A)\,; \quad (\varphi(x))(y) = xy$$

   è un isomorfismo di A-moduli.

   Per questo motivo $(A :_K I)$ si dice anche il *duale* di I.

8. Sia $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e sia $P := 2A + (1 + \sqrt{-5})A$. Mostrare che

$$P^{-1} = \frac{1+\sqrt{-5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{-5}}{2}A.$$

9. Determinare:

$$(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z})\,, \quad (\mathbb{Z}[i] : (1+i)\mathbb{Z}[i])\,, \quad (\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : 3\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]+(1+2\sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]).$$